Cours FONCTIONS PRIMITIVES

PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM BIOF

FONCTIONS PRIMITIVES

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

1) Activités : Activité1

1) Déterminer une fonction F qui admet pour fonction dérivée la fonction : $f(x)=x^2+2x+3$

2) existe-t-il une autre fonction G tel que : $(\forall x\in\mathbb{R});G'(x)=f(x)$?

3)combien Ya t'ils de onction H tel que : $(\forall x\in\mathbb{R});H'(x)=f(x)$?

et donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Remarques : 1) la fonction F tel que :

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$ Est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

Et on a $(\forall x\in\mathbb{R});F'(x)=f(x)$

On dira que : F est une primitive de f

2) Soit G une fonction définie sur

$G(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+2$ on a aussi : G est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R});G'(x)=f(x)$

G est aussi une primitive de f

3)toute fonction H de la forme :

$H(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$ aussi une primitive de f

Activité2 : Soient F une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire $(\forall x\in I)(F'(x)=f(x))$

et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I, α et β deux réels.

1- Montrer que $(\alpha F+\beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f+\beta g)$ sur I.

2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que : $(\forall x\in I)(F_2(x)=F_1(x)+\lambda)$

où λ est un réel quelconque.

3- Démontrer que si f admet une fonction primitive sur I et $x_0\in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction Primitive de f telle que

$F_0(x_0)=y_0$ où y_0 un réel quelconque.

2) Définition et propriétés

Définition : Soit f une fonction définir sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I si :1)F est dérivable sur I

2) $(\forall x\in I)(F'(x)=f(x))$

Théorème :(admis)

Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Remarque : La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

Propriété : Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la : forme :$F+\lambda$ où λ est un réel.

Propriété : Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors :

$(\forall x\in I)(F_2(x)=F_1(x)+\lambda)$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

Exemple : Soit la fonction f définie par :

$f(x)=2x+1$ si $x\leq 1$

$f(x)=2x-1$ si $x>1$

Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur $\mathbb{R}$

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)

en effet : $f(1)=3$ et $\lim_{x\to 1^+}f(x)=1\neq f(1)$

$F_1(x)=x^2+x+k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty,1]$.

$F_2(x)=x^2-x+k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1,+\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x) = x^2 + x + k_1 ; si ... x \leq 1 \\ F_2(x) = x^2 - x + k_2 ; si ... x \succ 1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$

On a F est dérivable sur$]-\infty, 1[$
et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$
et F est dérivable sur $]1, +\infty[$
et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$
Le problème il faut déterminer (s'ils existent)

k_1 et k_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et que :$F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1) = 2 + k_1$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim\limits_{x \to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = F(1)$

On en déduit que $2 + k_1 = k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x + k_2 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + k_2 - k_1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + k_1 - k_1}{x - 1}$$

Car : $2 + k_1 = k_2$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x = 1 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x + k_1 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x + 2 = 3 = F'_g(1)$$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F'_d(1) \neq F'_g(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Propriété : Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction Primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1)Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$

Solution :1) $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

Donc : $F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^{2+1} + \frac{1}{2} x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$

Donc : $F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2) $F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$

$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6} + k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{11}{6}$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$ est :

$F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$

Propriété : Si F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :
1) $(F + G)$ est une fonction primitive de la fonction $(f + g)$ sur I
2) (αF) est une fonction primitive de la fonction (αf) sur I

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} cos(ax + b) + c$
$cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} sin(ax + b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arcta\,n(x) + c$

4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

5) Application :

Exercice1 (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

3) $f(x) = \sin x + x\cos x$ 4) $f(x) = (2x-1)^3$

5) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ 6) $f(x) = 5x\sqrt[3]{3x^2+1}$

7) $f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ 8) $f(x) = 7x\cos(\pi x^2 + 3)$

Solutions : 1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

$F(x) = 5\times\frac{1}{5}x^5 + 3\times\frac{1}{2}x^2 + 1x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

$F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin x + x\cos x = x'\sin x + x(\sin x)'$

Donc : $F(x) = x \times \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$

$F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2}$

on doit remarquer que : $f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite : $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = 5x\sqrt[3]{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = 3x^2 + 1$ donne $u'(x) = 6x$ et par suite : $f(x) = \frac{5}{6}u'(x)\sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ $(n = 3)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x) = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4(x)} + k$

$F(x) = \frac{5}{8}\sqrt[3]{(3x^2+1)^4} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = 2x^2 + x$ donne $u'(x) = 4x + 1$

et par suite : $f(x) = \frac{u'(x)}{u^4(x)} = u'(x)u^{-4}(x)$

on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'u^n$ $(n = -4)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x) = \frac{1}{-4+1}u^{-4+1}(x) + k$

$F(x)=-\frac{1}{3}\left(2x^2+x\right)^{-3}+k=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(2x^2+x\right)^3}+k$

8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$

On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=\pi x^2+3$ donne $u'(x)=2\pi x$

et par suite : $f(x)=\frac{7}{2\pi}u'(x)\cos\left(u(x)\right)$

(c'est de la forme : $u'\times\left(v'\circ u\right)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{7}{2\pi}\sin\left(\pi x^2+3\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice2 (**situation indirecte):** Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{2}{x^2+2x+4}$ 2) $f(x)=\frac{6}{x^2+x+1}$

Solutions : 1) $f(x)=\frac{2}{x^2+2x+4}$

il faut faire des transformations :

A remarquer que $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2+3}$

Ce que nous laisse penser à la fonction $arctan$

$$f(x)=\frac{2}{3\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

(C'est de la forme : $\frac{u'}{(u)^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions

$F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{6}{x^2+x+1}$

A remarquer que $f(x)=\frac{6}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$f(x)=\frac{6}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}=8\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

(C'est de la forme : $\frac{u'}{(u)^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est strictement négatif.

Exercice3 (Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{2}{4x^2+4x+1}$ 2) $f(x)=\frac{6}{x^2+x+1}$

Solutions : 1) A remarquer que

$f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}=(-3)\left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right)$ (C'est de la forme: $-\frac{u'}{u^2}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=\frac{-3}{2x+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est nul

Exercice4 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

1) $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}$ 2) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}$

3) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x$ 4) $f(x)=(4x+5)^2$

5) $f(x)=2\sqrt{2x+1}$ 6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ 8) $f(x)=\tan^2 x$

9) $f(x)=\cos^4 x$ (utiliser : cos^2x =(1+$cos2x$)/2))

10) $f(x)=\sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3\,x$ = $sinx\ sin^2x$)

Solutions : 1) il faut faire des transformations : a remarquer que :

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}=\frac{x^2+1+4}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}=1+4\frac{1}{x^2+1}$$

Ce que nous laisse penser à la fonction $arctan$

(C'est de la forme : $\dfrac{1}{x^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=x+4\arctan x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}=-(2+\cos x)'(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F(x)=-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1}+k=-\frac{3}{2}(2+\cos x)^{\frac{2}{3}}+k$$

$F(x)=-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x=\left(x^2\right)'\sin x+x^2(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x^2\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(4x+5)^2=\dfrac{1}{4}(4x+5)'(4x+5)^2$

$$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}(4x+5)^{2+1}+k$$

$F(x)=\dfrac{1}{12}(4x+5)^3+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=2\sqrt{2x+1}=(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc : $F(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+k$$

6) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$F(x)=\sqrt{x^2+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}+1}+k=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+k$$

$F(x)=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

8) $f(x)=\tan^2 x=\left(1+\tan^2 x\right)-1$

$F(x)=\tan x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

9) $f(x)=\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$F(x)=\dfrac{3}{8}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{32}\sin 4x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

10) $f(x)=\sin^3 x=\sin x\times\sin^2 x=\sin x\times\left(1-\cos^2 x\right)$

$$f(x)=\sin x-\sin x\times\cos^2 x=\sin x+(\cos x)'\times\cos^2 x$$

$F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice5: Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1)Déterminer les réels a et b tels que :

$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2} \qquad \forall x\in[0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[0;+\infty[$ tel que : $F(1)=\frac{5}{2}$

Solution :1)

$$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$$

Donc : $\begin{cases}a=1\\2a=2\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a=1\\b=-1\end{cases}$ donc : $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

2) $f(x)=1-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$ Donc : $F(x)=x+\frac{1}{x+1}+k$

$k\in\mathbb{R} \quad \forall x\in[0;+\infty[$

Exercice6: Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$

par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1)montrer que : $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1} \quad \forall x\in[1;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1;+\infty[$ tel que : $F(2)=1$

Solution :1) $\forall x\in[1;+\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2}\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=|x-1|\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$$

On a : $x\in[1;+\infty[$ donc : $x\geq 1$ donc : $x-1\geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=(x-1)\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}-1\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}$$

2) $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1} \quad \forall x\in[1;+\infty[$

$$f(x)=\left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=(x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Donc : $F(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+k$

$$F(x)=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+k$$

$F(x)=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+k \qquad k\in\mathbb{R}$

Exercice7: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$$

1)Déterminer les réels a et b et c tels que :

$f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+4)^2}+c \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

2)Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0)=c$

Solution :1)

$$f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+4)^2}+c=\frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2}=\frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$f(x)=\frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2}$ donc :

$\begin{cases}c=5\\8c=40\\a=20\\b+16c=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=5\\c=5\\a=20\\b=0\end{cases}$ donc : $f(x)=\frac{20x}{(x^2+4)^2}+5$

2) $f(x)=\frac{20x}{(x^2+4)^2}+5\Leftrightarrow f(x)=10\frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}+5$

Donc : $F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+k \qquad k\in\mathbb{R}$

$$F(0)=5\Leftrightarrow -\frac{10}{4}+k=5\Leftrightarrow k=\frac{15}{2}$$

$F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+\frac{15}{2} \ \forall x\in\mathbb{R}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Cours : CALCULS INTEGRALES

Avec Exercices de rappels et d'applications et de réflexions avec solutions

CALCULS INTEGRALES

PROF: ATMANI NAJIB **2BAC SM**

I) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

1) Activité :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ l'unité choisie étant le centimètre .

On considère la fonction f définie sur IR par : $f\left(x\right)=3$ et on note C sa courbe représentative.

Soit R la partie du plan limitée par C , l'axe des abscisses , et les droites d'équations : x = −1 et x = 2 .

a) Calculer l'aire A en cm² de R.

b) Déterminer une primitive F de f sur IR et calculer F (2) − F (−1).

c)) Déterminer une autre primitive G de f sur IR et calculer G (2) − G (−1).

2) Intégral et primitive.

2.1 Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ on écrit :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\left[F\left(x\right)\right]_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

on lit somme $f\left(x\right)dx$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ et on l'appelle intégrale de a à b.

Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure de l'intégrale.

Remarque :1)Dans l'écriture : $\int_a^b f\left(t\right)dt$ la variable t s'appelle une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable tant qu'elle ne figure pas dans l'une des deux bornes.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(t\right)dt=\int_a^b f\left(s\right)ds==\left[F\left(x\right)\right]_a^b$$

2) Si F_1 et F_2 sont deux fonctions primitive de f sur I

alors :$(\forall x\in I)$($F_2\ (x)=F_1\ (x)+C$) (C $constante$)

Et on aura : $F_2\left(b\right)-F_2\left(a\right)=\left(F_1\left(b\right)+c\right)-F_2\left(a\right)+c$

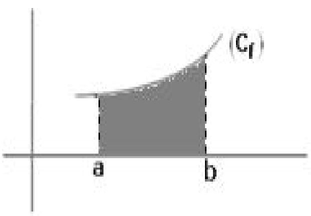
$F_2\left(b\right)-F_2\left(a\right)=F_1\left(b\right)-F_1\left(a\right)$ donc pour le calcul d'une intégrale, on prend C = 0.

2.2) Interprétation géométrique de l'intégrale.

si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

l'intégrale de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ de la fonction f represente l'aire du domaine délimité par :

- L'axe des abscisses
- Les droites d'équation : x = $\boldsymbol{a}$ et x = $\boldsymbol{b}$
- La courbe de f .



2.3 Propriété :

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f\left(x\right)dx$ existe et finie.

2.4 Exemples :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1\left(2x+3\right)dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left(2\theta\right)d\theta$

Solution :1)la fonction $x\mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x\mapsto\frac{3}{2}x^2$

Donc : $I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times4^2-\frac{3}{2}\times2^2=18$

2) $J=\int_0^1\left(2x+3\right)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=\left(1+3\right)-\left(0\right)=4$

3) $K=\int_{e}^{e^2}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_{e}^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}$

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^2(2x-1)dx$ 2) $I_2=\int_{-1}^{1}\left(x^4-4x^3+2\right)dx$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ 4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt$ 6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ 8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

9) $I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ 10) $I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11) $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$ 12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x dx$

13 $I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx$ 14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)dx$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$ 16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx$ 18) $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ 20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2dx$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

Solution :1) $I_1=\int_0^2(2x-1)dx=\left[2\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\left[x^2-x\right]_0^2$

$I_1=\left(2^2-2\right)-\left(0^2-0\right)=4-2=2$

$I_2=\int_{-1}^{1}\left(x^4-4x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{4}x^4+2x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^{1}$

$I_2=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{5}1^5-1^4+2\right)-\left(\frac{1}{5}(-1)^5-(-1)^4-2\right)$

$I_2=\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{5}-1-2\right)=\frac{1}{5}-1+2+\frac{1}{5}+1+2=\frac{2}{5}+4=\frac{22}{5}$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt=\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}(2t)'e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{2\times 0}$

$I_4=\frac{1}{2}e^{\ln 2^2}-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}4-\frac{1}{2}e^0=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}-\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'e^{-t^2}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$I_5=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}e^{-0^2}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln 2}\right)^2}+\frac{1}{2}$

$I_5=-\frac{1}{2}e^{-\ln 2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln 2}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^2 x dx=\int_1^e\ln' x\times\ln^2 x dx$

$I_6=\left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1}x\right]_1^e=\frac{1}{3}\ln^3 e-\frac{1}{3}\ln^3 1=\frac{1}{3}$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}$

$I_7=\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-\ln\left|e^0+1\right|=\ln|3|-\ln|2|=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{e^x-e^{-x}}dx=\left[\ln\left|e^x-e^{-x}\right|\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I_8=\ln\left|e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right|=\ln\left|3-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$

$I_8=\ln\left|3-\frac{1}{3}\right|-\ln\left|2-\frac{1}{2}\right|=\ln\left(\frac{8}{3}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}}\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$

9) $I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^1dx=\left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1}\right]_1^e$

$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx = 2\int_2^3 \frac{\left(x^2+3x-4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}dx = 2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3$$

$$I_{10} = 2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3 = 2\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx = 2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$$

$$I_{11} = 2\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3 - 1\right) = \frac{4}{3}\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$$

12) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4}\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$I_{12} = \frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5}dx = 3\int_1^2 (3x-4)^{-5}dx = \int_1^2 (3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2 = \frac{1}{-4}(2)^{-4} - \frac{1}{-4}(-1)^{-4}$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4}\times\frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

14) $I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2-\cos 3x)dx = \left[2x - \frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$I_{14} = \left(2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\sin\pi\right) - 0 = \frac{2\pi}{3}$$

15) $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

(on a : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi+2}{8}$$

16) $I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln|3| + 1 - \frac{1}{2}\ln|1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 3$$

17) $I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}\times\ln^3 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^3 x dx$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1} x\right]_1^e = \frac{1}{4}\ln^4 e - \frac{1}{4}\ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1)e^{(x-1)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left((x-1)^2\right)' e^{(x-1)^2}dt = \left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}(1-e)$$

19) $I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx = \left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$$

$$I_{19} = \ln|1+\ln 2| - \ln|1+\ln 1| = \ln|1+\ln 2| = \ln(1+\ln 2)$$

20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1dx$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1+(\tan x)^2\right) - 1\right)dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x}dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x}\right)dx$

$$= \left[\frac{8}{9}x^9 - 4x + 2\ln x\right]_1^e = \frac{8}{9}e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

Formules importantes : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin(2a) = 2\sin a \times \cos a$

3) Intégral et operation et règles de calculs

Propriété1 : Soient f, g et f' des fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a :

1) $\int_a^b f'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

2) $\int_a^b \alpha dx = [\alpha x]_a^b = \alpha(b-a)$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(Relation de Chasles)

6) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (linéarité)

7) $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

Preuve : démontrons par exemple la Relation de Chasles

f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur I.

Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

$\int_a^c f(x)dx$ = F(c) − F(a) par définition

$\int_c^b f(x)dx$ = F(b) - F(c)

$\int_a^b f(x)dx$ = F(b) − F(a)

$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ = F(c) − F(a)+ F(b) - F(c)

= F(b) − F(a)

L'égalité annoncée est donc vraie.

Exemple1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1|dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx$

Solution :1)on a $x \in [0,3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1|dx = \int_0^1 |x-1|dx + \int_1^3 |x-1|dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}-3\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{5}{2}$$

2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx$

$x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=-1$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a)si $x \in [-2;-1]$ alors : $x(x+1) \geq 0$

donc : $|x(x+1)| = x(x+1)$

b)si $x \in [-1;0]$ alors : $x(x+1) \leq 0$

$|x(x+1)| = -x(x+1)$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)|dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)|dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)|dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2+x)dx + \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = 1$$

Exemple2: on pose: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Solution :

1) $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x)dx$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

2) $\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ par sommation on trouve:

$2I=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ donc : $I=\frac{\pi+2}{8}$ et on replace dans dans la 1ére équation et on trouve: $\frac{\pi+2}{8}+J=\frac{\pi}{4}$

Donc: $J=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi+2}{8}=\frac{2\pi-\pi-2}{8}=\frac{\pi-2}{8}$

Exercice 2:

on pose : $I=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J=\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-3J$

2)en déduire I et J

Solution :1)

$$I+J=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx+\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}+\frac{1}{e^x+4}\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{ln16}\left(\frac{e^x+4}{e^x+4}\right)dx=[x]_0^{ln16}=ln16-0=4ln2$$

$$I-3J=\int_0^{ln16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx-3\int_0^{ln16}\frac{1}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\left(\frac{e^x+3}{e^x+4}-\frac{3}{e^x+4}\right)dx$$

$$I-3J=\int_0^{ln16}\frac{e^x}{e^x+4}dx=\int_0^{ln16}\frac{\left(e^x+4\right)'}{e^x+4}dx=\left[\ln\left|e^x+4\right|\right]_0^{ln16}$$

$$I-3J=\ln\left|e^{ln16}+4\right|-\ln\left|e^0+4\right|=\ln|20|-\ln|5|=\ln 20-\ln 5$$

$$I-3J=\ln\frac{20}{5}=\ln 4=2\ln 2$$

2) $\begin{cases}I+J=4ln2\\I-3J=2ln2\end{cases}$ par soustraction on trouve:

$4J=2ln2$ donc: $J=\frac{ln2}{2}$

Et on replace dans dans la 1ére équation et on trouve :

$\frac{ln2}{2}+I=4ln2$ donc: $I=4ln2-\frac{ln2}{2}=\frac{7ln2}{2}$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ 2) $I=\int_0^{\ln3}\left|2-e^x\right|dx$

3) $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

Solution : 1) $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

La Relation de Chasles donne :

$$I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx=\int_0^2\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\int_0^2\frac{-(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3\frac{x-2}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{-\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

2) $I=\int_0^{\ln3}\left|2-e^x\right|dx$

$$2-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 2\Leftrightarrow x\leq\ln 2$$

$$I=\int_0^{\ln2}\left|2-e^x\right|dx+\int_{\ln2}^{\ln3}\left|2-e^x\right|dx$$

$$I=\int_0^{\ln2}\left(2-e^x\right)dx+\int_{\ln2}^{\ln3}e^x-2dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2x-e^x\right]_0^{\ln2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln2}^{\ln3}$$

$$I=\left(\left(2\ln2-2\right)+1\right)+\left(\left(3-2\ln3\right)-\left(2-2\ln2\right)\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Exercice 4:on pose : $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ et

$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

1)Calculer $K+L$ et $K-L$

2)en déduire K et L

Solution :

1) $K+L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K+L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$K+L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

La linéarité de l'intégrale donne :

$$K-L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$K-L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}\right)dx$$

$$K-L=\left[\ln|\cos x+\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\ln 2$$

2) $\begin{cases}K+L=\frac{\pi}{4}\\ K-L=\frac{1}{2}\ln 2\end{cases}$ par sommation et soustraction

on trouve: $2K=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ et $2L=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Donc : $K=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$ et $L=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$

$$I=\int_0^1\frac{x^3}{x^2+1}dx$$

Exercice 5: Calculer l' intégrale suivante :

$$I=\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx$$

Solution : On remarque que :

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$$

donc : $I=\int_0^1\frac{1}{x^2-4}dx=\int_0^1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_0^1$$

$$I=-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 3-\ln 2)=-\frac{1}{4}\ln 3$$

Exercice 6:on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Solution :1)on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{iX}+e^{-iX}}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

Or on sait que :

$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ t $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

Donc : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left((2\cos 4x)+4(2\cos 2x)+6\right)$

Donc: $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4x+4\cos 2x+3)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

4) Intégrales et ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a\in I$ et $b\in I$ et $a\leq b$

1)Si f est positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

2) Si $(\forall x\in[a;b]);\ f(x)\leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$$

3) $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$

Preuve : 1) Soit F une fonction primitive de la fonction f sur I. on a : $\int_a^b f(x)dx = = F(b) - F(a)$

Et comme $f(x) = F'(x)$ est positive alors F est croissante et par suite $(a < b)$ $F(b) - F(a) \geq 0$

2) On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ et on applique la propriété précédente

3)On a $(\forall x \in [a, b])$: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

En passant à l'intégrale on en déduit :

$$-\left|\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx\right|\int_a^b |f(x)|dx$$

$$-\int_a^b |f(x)| \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|$$

Et par suite : $\left|\int_a^b f(x)dx \leq \right|\int_a^b |f(x)|dx$

Remarques : Les réciproques de chacun des points de cette propriété sont fausses.

1)Par exemple : $\int_0^2 (x^2-1)dx = \frac{2}{3}$ mais pourtant, la fonction : $x \to x^2-1$ n'est pas positive sur [0 ; 2] : car l'image de 0 est −1.

2)De même $\int_0^2 1dx \leq \int_0^2 x^2 dx$ puisque $2 \leq \frac{6}{3}$

mais la fonction $x \to x^2$ n'est pas toujours Supérieure à 1 sur [0 ; 2].

Exemple1 : d'application Soit f : $x \to e^{-x^2}$

Définie sur R.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \int_1^a f(x)dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$0 \leq F(a) \leq e^{-1}$.

Solution : 1) Une exponentielle étant toujours positive : $0 \leq f(x)$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc $e^{-x} \geq f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.

On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle [1 ; a] et ainsi

$$\int_1^a 0dx \leq \int_1^a f(x)dx \leq \int_1^a e^{-x}dx$$

$0 \leq F(a) \leq \left[-e^{-x}\right]_1^a$ Donc

$$0 \leq F(a) \leq -e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1}$$

Donc : $0 \leq F(a) \leq e^{-1}$ ce qui démontre l'inégalité voulue.

Exemple2 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \leq \frac{1}{3}$

Solution : on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$$

Donc : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$

Donc : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^2 dx$

Donc : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ Donc : $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$

Exercice7 : soit la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n) est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution : 1) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

Et on a: $\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$ car $0 \leq x$

Donc : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$

Donc: $\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx \geq 0$

Donc: $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc: (u_n) est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n+1} \leq 1$

Donc: $\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1} dx \leq \int_0^1 1 dx$

Donc: $\frac{1}{2}[x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1} dx \leq [x]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice8 : soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [0;1] : \frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$

2) En déduire: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

II) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

Théorème et définition :

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \leq b$ alors il existe au moins un réel c dans [a ; b].

Tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ S'appelle La valeur moyenne de f sur [a ; b]

Preuve : On a : f est continue sur $[a, b]$ donc $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $m \leq f(x) \leq M$

en passant à l'intégrale :

$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$

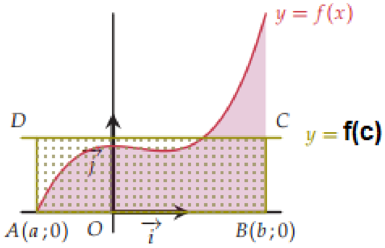
d'où : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Finalement : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$

Donc et d'après le T.V.I Il existe au moins un élément c de $]a, b[$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Interprétation géométrique :

: Dans le cas où f est positive et continue sur [a ; b], la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle [a ; b]. et L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition : $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$



Exemple : on considére la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Solution : La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Est : $f(c) = \frac{1}{\ln 2 - 0}\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx = \frac{1}{\ln 2 - 0}\int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}dx$

$= \frac{1}{\ln 2}\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{3\ln 2}$

Exercice 9: Considérons la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(0) = 0$ et $(\forall x > 0)(F(x) = \int_x^{4x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt)$

1- a) Montrer que $(\forall x > 0)(\exists c \in]x, 4x[)$ tel que : $F(x) = 3x\frac{e^{-c}}{\sqrt{c}}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$:

$\frac{3}{2}\sqrt{x}e^{-4x} \leq F(x) \leq 3x\sqrt{x}e^{-x}$

c) Calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to 0^+} F(x)$

d) Calculer : $\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{x}$ .que pouvez-vous en déduire ?

2- a) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et calculer $F'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de F.

c) Construire la courbe CF

III)TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

1-1Rappelle

Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b) + c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arctan(x) + c$

Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

1-2 Exemples

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ 2) $B=\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

3) $C=\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Solution : 1) $A=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

$=[ar\tan t]_0^1 = ar\tan 1 - ar\tan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

2) $B=\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int_1^e (\ln x)'(\ln x)^3 dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^4}{4} - \frac{(\ln 1)^4}{4} = \frac{1}{4}$

3) $C=\int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right]_1^{\sqrt{3}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}(2-1) = \frac{2}{3}$

2)Intégration par partie :

2-1 Introduction :

Considérons l'intégrale $I=\int_1^e f(x)dx$

On ne peut pas trouver une fonction primitive usuelle de la fonction :$x \mapsto x\,ln(x)$ donc on ne peut pas calculer I en se basant directement sur le tableau des fonctions usuelles.

Preuve : (d'une propriété)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I.

On sait que $(\forall x \in I)$:

$((u\,.\,v)'(x) = u'(x).\,v(x) + v'(x).\,u(x)$

Par suite :

$(\forall x \in I)(u'(x).\,v(x) = (u\,.\,v)'(x) - v'(x).\,u(x)$

En passant à l'intégrale :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Or $u.\,v$ est une fonction primitive de $(u.\,v)'$ donc :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette égalité porte le nom d'une intégration par partie

2-2**Propriété :** Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

2-3 Exemples :
Calculer l' intégrale suivante :

1) $I=\int_0^{\pi} x\sin x dx$ 2) $J=\int_0^{\ln 2} xe^x dx$

3) $K=\int_1^e \ln x dx$

Solution : 1) $I=\int_0^{\pi} x\sin x dx$

On pose : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\pi]$

donc :

$I=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x dx=[-x\cos x]_0^{\pi}-[-\sin x]_0^{\pi}=\pi$

2) $J=\int_0^{\ln 2} xe^x dx$

On pose : $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\ln 2]$ et u' et v' sont continue sur

$[0;\ln 2]$

Donc : $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2} 1e^x dx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$J=2\ln 2-\left(e^{\ln 2}-1\right)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$

3) $K=\int_1^e \ln x dx$ on a $K=\int_1^e \ln x dx=\int_1^e 1\times\ln x dx$

On pose : $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$

Donc : $u(x)=x$ et $v'(x)=1/x$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1;e]$ et u' et v' sont continue sur $[1;e]$

Donc : $K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$K=e-\int_1^e 1dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$

Remarque :
Pour le choix des fonctions on utilise $A.\ L.\ P.\ E.\ T$

A: Arc tangente L: logarithme P: polynôme
E: exponentielle T: fonctions trigonométrique

Exercice10 : En utilisant une intégration par partie calculer :

1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K=\int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$

5) $M=\int_1^e (x\ln x)dx$ 6) $N=\int_1^e \cos(\ln x)dx$

Solution : 1)

$I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ la démarche est la même

$I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$I=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$

$I=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}\ln x dx$

$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}3x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-3\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-9\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_1^{e^3}=9$

Exercice11 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J=\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

$K=\int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

$M=\int_1^e x(1-\ln x)dx$ $N=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$

$R=\int_1^e x\ln x dx$ $Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

Exercice 12: On pose : $I_0=\int_0^1\sqrt{x+3}dx$

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

3) Intégration par changement de variable :

3-1) Propriété : Soient g une fonction dérivable sur

$[a, b]$ telle que g' continue sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $g([a, b])$ on a :

$$\int_a^b (f \circ g)(t).g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x).dx$$

Cette propriété s'appelle propriété du changement de variable.

Preuve :

Soit F une fonction primitive de la fonction f sur $g([a, b])$ on a :

$$\int_a^b (f \circ g)(t).g'(t)dt = \int_a^b (F' \circ g)(t).g'(t)dt$$

$$= \int_a^b (F \circ g)'(t)dt = \left[(F \circ g)(t)\right]_a^b = (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a)$$

$$= \left[F(x)\right]_{g(a)}^{g(b)}$$

3-2) Exemples : En utilisant une intégration par changement de variable.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

Solution : 1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

On a : $x = \sqrt{t}$ donc : $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(1+x^2)x}dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}dt$$

$$I_1 = \left[2\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\arctan\sqrt{3} - 2\arctan 1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

On a : $t = e^x$ donc : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$\frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ on en déduit que : $\frac{dt}{t} = dx$

$$I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_1^2 \frac{t^3+t^2+3t}{1+t^2}\frac{dt}{t}$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{t^2+t+3}{1+t^2}dt = \int_1^2 \left(t + \frac{3}{1+t^2}\right)dt$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}t^2 + 3\arctan x\right]_1^2 \text{ (Continuer les calculs)}$$

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$

On a $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{(\ln t)'}{\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

$$x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

On a : $x = \ln t$ donc : $\begin{cases} t = e^{-2} \Rightarrow x = -2 \\ t = e \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$$I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt = \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{3+x}}dx$$

On sait que: $x \to 2\sqrt{3+x}$ est une primitive de :

$x \to \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ donc : $I_3 = \left[2\sqrt{3+x}\right]_{-2}^{1}$ donc : $I_3 = 2$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

On trouve :

$$I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)-dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$$

On sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t}=\dfrac{1-\tan t}{1+\tan t}$

Donc : $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\dfrac{2}{1+\tan t}$

Donc : $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\dfrac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln\left(1+\tan t\right)\right)dt$

Donc: $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln\left(1+\tan t\right)\right)dt$

$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-I_4$ Donc:

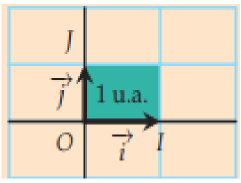
$$2I_4=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dt\Rightarrow 2I_4=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I_4=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

V) INTEGRALE ET SURFACE.

Dans tout ce qui va suivre : Cf est la courbe représentative de la fonction f sur $[a, b]$ dans un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) DÉFINITION(unité d'aire)

On note I et J les points tels que : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ = et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$



L'unité d'aire, que l'on note u.a., est l'aire du rectangle dont O, I et J forment trois sommets.

2) Activités :

Activité 1: $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=1cm$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f\left(x\right)=2x+1$

1)verifier que f est continue et positif sur $[1;3]$

2)tracer Cf la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : x = 1 et x = 3

4)calculer l'intégrale : $I=\int_1^3 f\left(x\right)dx$

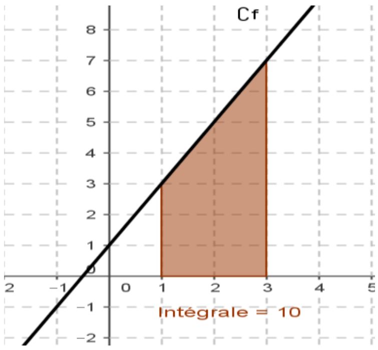
Que peut-on dire ?

Solution :1)f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$

$x\in[1;3]\Leftrightarrow 1\le x\le 3\Leftrightarrow 3\le 2x+1\le 7$

Donc :f est continue et positif sur $[1;3]$

2)



3) Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est

$$A\left(\Delta_f\right)=2\times 3+\frac{4\times 2}{2}=2\times 3c^2m+\frac{4\times 2}{2}c^2m=10c^2m$$

4) $I=\int_1^3 f\left(x\right)dx=\int_1^3\left(2x+1\right)dx=\left[x^2+x\right]_1^3$

$I=\left(3^2+3\right)-\left(1^2+1\right)=12-2=10$

5)on remarque que : $A\left(\Delta_f\right)=\int_1^3 f\left(x\right)dx.ua$

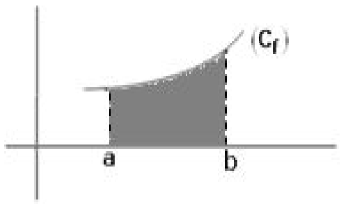
Avec : $u.a=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|=1\times 1=1$

Proposition1 :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

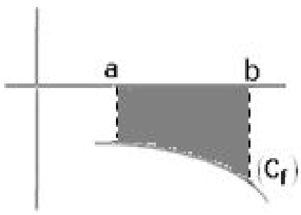
L'intégrale de a à b de f est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.

$$A\left(\Delta_f\right)=\int_a^b f\left(x\right)dx.ua$$



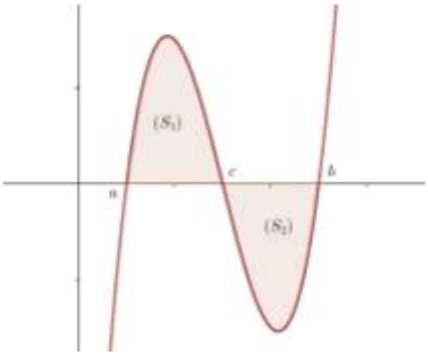
Remarque : si f une fonction continue et négatif sur un intervalle [a ; b]

$$A\left(\Delta_f\right)=-\int_a^b f\left(x\right)dx\ \ ua$$



Proposition2 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation : x = a et x = b.

est : $A\left(\Delta_f\right)=\int_a^b\left|f(x)\right|dx \;\; ua$



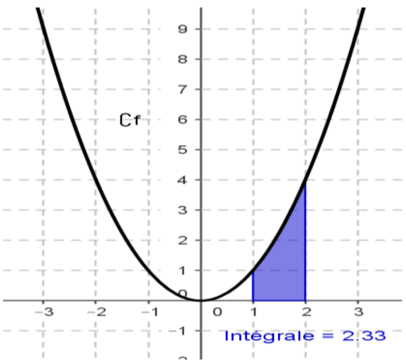
Preuve : Il suffit de déterminer les racines de l'équation $f(x)$ = 0 dans l'intervalle[a, b] et d'appliquer les propriétés précédentes et la relation de Chasles.

Exemple1 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec

$\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : x = 1 et x = 2

Solution :1)



2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :

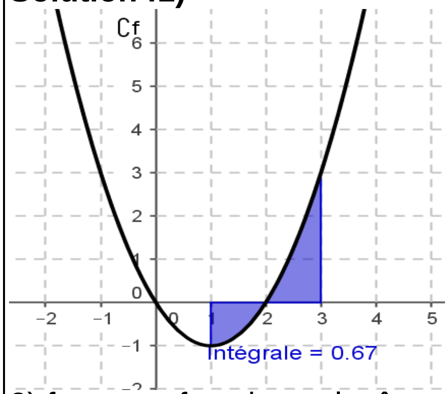
$$A=\int_1^2\left|f(x)\right|dx=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx$$

$$A=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{1}{3}\times2^3-\frac{1}{3}\times1^3=\frac{7}{3}\times2cm\times2cm=\frac{28}{3}c^2m$$

Exemple2 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthogonale avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$ et $\left\|\vec{j}\right\|=3cm$
Soit f définit par : $f(x)=x^2-2x$

1)tracer Cf la courbe représentative de f
2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : x = 1 et $x=3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur $[1;3]$ donc : $A=\int_1^3\left|f(x)\right|dx=\int_1^3\left|x^2-2x\right|dx$

Etudions le signe de : x^2-2x dans $[1;3]$
$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x2-2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$A=\int_1^3\left|x^2-2x\right|dx=\int_1^2\left|x^2-2x\right|dx+\int_2^3\left|x^2-2x\right|dx$$

$$A=\int_1^2-\left(x^2-2x\right)dx+\int_2^3\left(x^2-2x\right)dx$$

$$A=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{3}\times2^3+2^2+\frac{1}{3}\times1^3-1^2+\frac{1}{3}\times3^3-3^2-\frac{1}{3}\times2^3+2^2$$

$$=-\frac{2}{3}\times2^3+8+\frac{1}{3}-1+\frac{27}{3}-9=-\frac{16}{3}+\frac{1}{3}+\frac{27}{3}-2$$

$$A=2\times2cm\times3cm=12c^2m$$

Exercice13 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

Soit f définit par : $f(x)=1-e^x$
Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :
$x=\ln2$ et $x=\ln4$

Solution :il suffit de calculer : $I=\int_{\ln2}^{\ln4}\left|f(x)\right|dx$

$$I=\int_{\ln2}^{\ln4}\left|f(x)\right|dx=\int_{\ln2}^{\ln4}\left|1-e^x\right|dx$$

On sait que : $\ln2\le x\le\ln4$ donc : $e^{\ln2}\le e^x\le e^{\ln4}$

Donc : $2\le e^x\le4$ donc $e^x>1$ par suite: $1-e^x<0$

Donc:

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|1-e^{x}\right|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}-\left(1-e^{x}\right)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(e^{x}-1\right)dx$$

$$I=\left[e^{x}-x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}=\left(e^{\ln 4}-\ln 4\right)-\left(e^{\ln 2}-\ln 2\right)$$

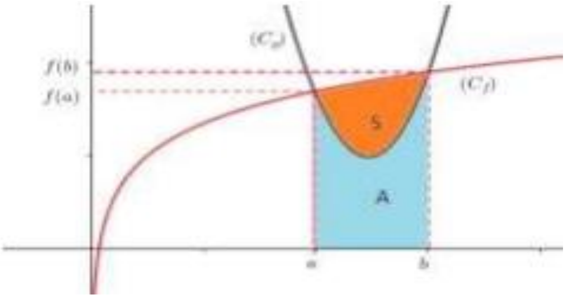
$$I=\left(4-2\ln 2\right)-\left(2-\ln 2\right)=4-2\ln 2-2+\ln 2=2-\ln 2$$

Donc : $A=\left(2-\ln 2\right)\times 2cm\times 2cm=4\left(2-\ln 2\right)c^{2}m$

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et soit S la surface du domaine limité par $\left(C_f\right)$; $\left(C_g\right)$ et les droites $x = a$; $x = b$ on a :

$S=\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$ Ua

Preuve :



Il suffit d'étudier les cas :
Par exemple si $f \geq 0$ et $g \geq 0$ et $f \geq g$ sur $[a, b]$

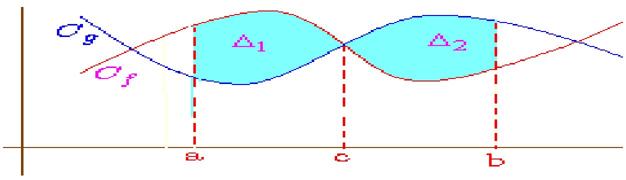
On aura : $S=\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx-A=\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx-\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$

$$S=\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$$

Et de la même façon on étudie les autres cas.

Remarques :

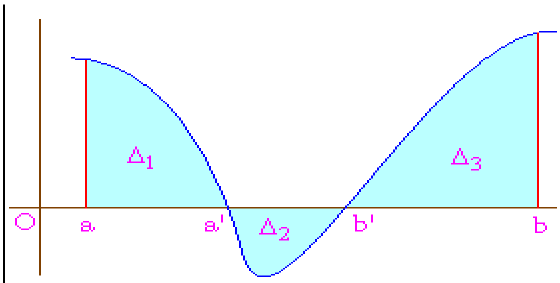
a) Si on a par exemple :



$$S=\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$$

$$S=\int_{a}^{c}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx+\int_{c}^{b}\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx$$

b) Si on a par exemple :



$$A\left(\Delta\right)=\int_{a}^{a'}f(x)dx+\int_{a'}^{b'}-f(x)dx+\int_{b'}^{b}f(x)dx$$

Exemple : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f\left(x\right)=\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x} \text{ et } g\left(x\right)=e^{-x}$$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par : $\left(C_f\right)$; $\left(C_g\right)$ et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution :il suffit de calculer :

$$I=\int_{1}^{e}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$$

$$I=\int_{0}^{\ln 2}\left|\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x}-e^{-x}\right|dx=\int_{0}^{\ln 2}\left|\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right|dx=\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

Car : $\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}>0$

Donc: $I=\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx=2\int_{0}^{\ln 2}\frac{\left(e^{x}+1\right)'}{e^{x}+1}dx=\left[2\ln\left|e^{x}+1\right|\right]_{0}^{\ln 2}$

Donc :

$$I=2\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-2\ln\left|e^{0}+1\right|=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$$

Donc : $A=2\ln\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=8\ln\frac{3}{2}c^{2}m$

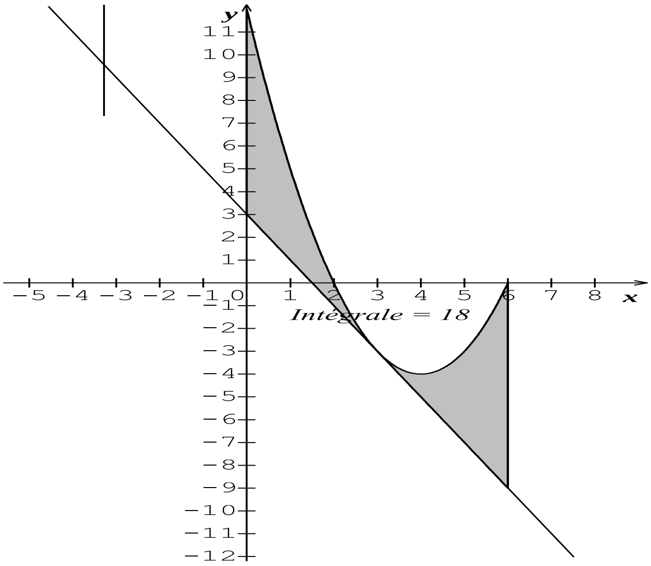
Exercice14 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=0.5cm$ et Soit f définit par : $f\left(x\right)=x^2-8x+12$ et $\left(D\right)$la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$au point $A\left(3;f(3)\right)$

Calculer A la surface du domaine limité par : $\left(C_f\right)$ et les droites : $\left(D\right)$ et $x=1$et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe $\left(C_f\right)$ au point $A(3;f(3))$ est : $y=f(3)+f'(3)(x-3)$

$f'(x)=2x-8$ et $f'(3)=-2$ et $f(3)=-3$

$(D): y=-2x+3$



il suffit de calculer :

$I=\int_0^6\left|f(x)-y\right|dx=\int_0^6\left(x^2-6x+9\right)dx=\int_0^6(x+3)'(x+3)^2dx$

$I=\left[\frac{(x+3)^3}{3}\right]_0^6=18$ donc :

$A=18\times(0.5cm)^2=4.5cm^2$

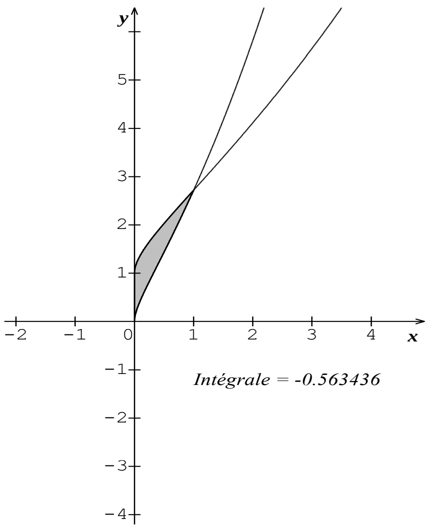
Exercice15 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_f et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice16 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : $\left(C_f\right)$; $\left(C_g\right)$ et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$S=\int_0^1\left|f(x)-g(x)\right|dx$ Ua

$S=\int_0^1\left|e^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\right|dx=\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left|1-\sqrt{x}\right|dx$

On sait que : $0\le x\le 1$ donc : $0\le\sqrt{x}\le 1$ donc :

$0\le 1-\sqrt{x}$ donc : $S==\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)dx$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$S==\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)dx=\left[\left(6\left(\sqrt{x}-1\right)-2x\right)e^{\sqrt{x}}\right]_0^1$

$S=6-2e$ Ua

Exercice17 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\frac{xe^x+x+1}{e^x+1}$

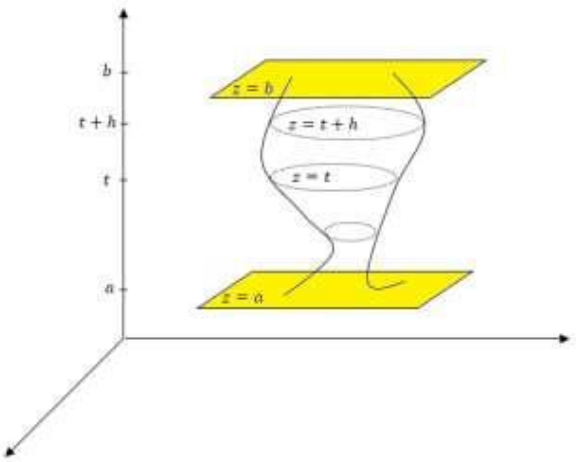
1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: x = 0 et x = 1.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y=x$; la courbe C_f et les droites: x = 0 et x = 1.

VI) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

1) Volume d'un solide :

Activité :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $R\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.On considère un solide (S) compris



entre les plan $z = a$ et $z = b$ ($a < b$)

Soit t un élément de $[a, b]$ et $h > 0$ tel que : $t + h \in [a, b]$

Soit $S(t)$ la surface de l'intersection du solide (S) et du plan $z = t$.

$v(t)$ le volume du solide compris entre les plans : $z = t$ et $z = t + h$.

$V(t)$ le volume du solide compris entre les plans : $z = a$ et $z = t$.

Remarquez que $V(t + h) - V(t) = v(t)$

D'autre part : (pour $h > 0$) :

$h \times S(t) \leq v(t) \leq h \times S(t + h)$

Donc :$S(t) \leq v(t)/h \leq S(t + h)$

Et donc :$S(t) \leq (V(t+h)-V(t))/h \leq S(t + h)$

Et comme la fonction $t \mapsto S(t)$ et continue sur $[a, b]$ alors : $\lim\limits_{h\to 0^+} S(t + h) = S(t)$

On aura donc :

$\lim\limits_{h\to 0^+} (V(t+h)-V(t))/h = S(t)$

De la même façon on montre que :

$\lim\limits_{h\to 0^-} (V(t+h)-V(t))/h = S(t)$

donc : $\lim\limits_{h\to 0} (V(t+h)-V(t))/h = S(t)$

et donc $t \mapsto V(t)$ est dérivable sur $[a, b]$

et $(\forall t \in [a, b])(V'(t) = S(t))$ et par suite :

$\int_a^a V'(t)dx = \int_a^a S(t)dt$ Ce qui signifie que :

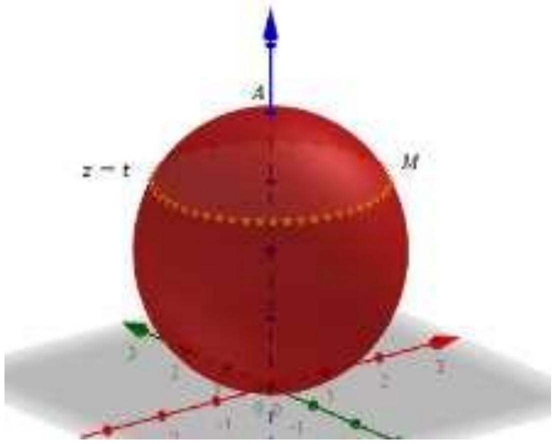
$$\int_a^b S(t)dx = \int_a^b V'(t)dx = \left[V(t)\right]_a^b = V(b) - V(a)$$

Et comme $V(a) = 0$ et $V(b) = V_{(S)}$ le volume du solide alors est : $V_{(S)} = \int_a^b S(t)dt$

Propriété : Soit (S) un solide compris entre les plans $Z = a$ et $z = b$ e volume par unité de volume du solide (S) est :$V_{(S)} = \int_a^b S(t)dt$ Où $S(t)$ est la surface de l'intersection du solide S et du plan $z = t$

Applications :

1)Volume d'une sphère :

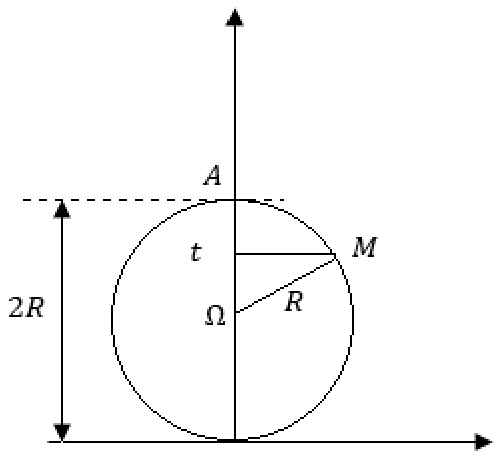


Soit S la sphère de centre Ω et de rayon R

Après découpage de la sphère

(Suivant le plan $x = 0$)

on obtient la figure suivante :



Le plan $z = t$ coupe la sphère suivant un cercle de rayon r et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ΩMN on a :$MN^2 = R^2 - \Omega N^2$

donc $r^2 = R^2 - (t - R)^2 = 2tR - t^2$

D'où $s(t) = \pi r^2 = 2\pi tR - \pi t^2$

et le volume de la sphère S est :

$$V_{(S)} = \int_0^{2R} S(t)dt = \int_0^{2R}\left(2\pi tR - \pi t^2\right)dt$$

$$V_{(S)} = \left[\pi t^2 R - \frac{1}{3}\pi t^3\right]_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

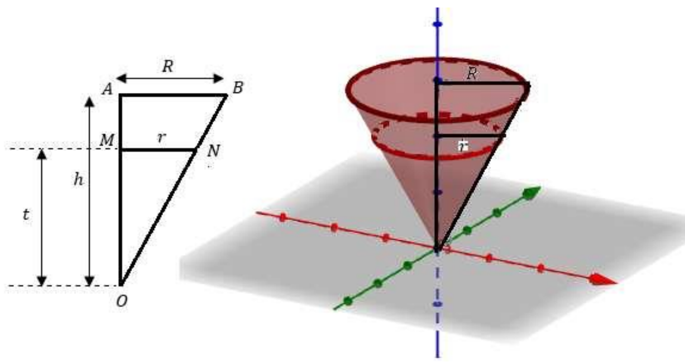
Remarque :

On pouvait prendre $\Omega = O$ le centre du repère et le volume de la sphère sera :

$$V_{(S)} = \int_{-R}^{R} S(t)dt = \int_{-R}^{R}\left(R^2 - t^2\right)dt$$

et on trouvera le même résultat.

2) Volume d'un cône :



Soit $(\mathcal{C})$ le cône de rayon R et de hauteur h

$z = t$ coupe le cône $(\mathcal{C})$ suivant un cercle $\Gamma(t)$ de rayon r

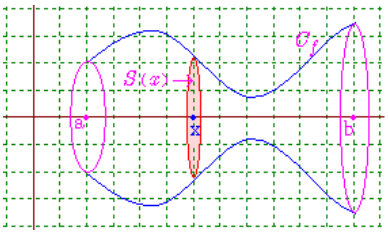
1- En utilisant le théorème de Thalès, déterminer r en fonction de h, R et t

2- Déterminer la surface $S(t)$ de $\Gamma(t)$

3- Calculer le volume du cône $(\mathcal{C})$

2) Volume d'un solide engendré par la rotation d'une courbe .

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$



La rotation de la courbe (C_f) autours de (Ox)

engendre un solide (S)

un plan x = fixe coupe le solide (S) suivant un cercle de rayon $f(x)$ donc : $s(x) = \pi(f(x))^2$

Et le volume du solide (S) est : $V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume

$V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx \quad u.v$ (par unité de volume)

Remarque : si le repere est : $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

$u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

Exemple 1: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

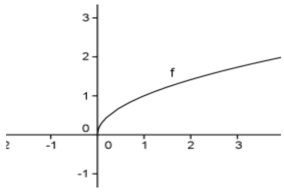
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^4 \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x dx$$

$I = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$ et on a :



$u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\| = 8cm^3$

Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exemple 2: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution :on calcul : $\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx$

$$I = \int_0^1 \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \pi\left(\sqrt{x\left(e^x - 1\right)}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x\left(e^x - 1\right)dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

Donc : $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=\left[x\left(e^x-x\right)\right]_0^1-\int_0^1 1\left(e^x-x\right)dx$

$$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-e+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

Donc : $I=\frac{1}{2}\pi$ par suite :

$$V=\frac{1}{2}\pi\times\frac{8}{27}c^3m=\frac{4\pi}{27}c^3m$$

Exercice18: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice19: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

Soit la fonction f définit par :

$f(x)=x\sqrt{1-lnx}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

VII) SOMMES DE RIEMANN

Théorème1 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. $a \prec b$

$\forall n\in\mathbb{N}-\{0:1\}$ On considére les nombres :

$x_0=a$ et $x_n=b$ et $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$: $\quad 0\le k\le n$

$\forall k\in[0;n-1]$ soit M_k et m_k la valeur maximal et minimal de f sur $\left[x_k;x_{k+1}\right]$

On pose : $\lambda_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}M_k$ et $\mu_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m_k$

On a donc : $\mu_n\le\int_a^b f(x)dx\le\lambda_n \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0:1\}$

Théorème2 et définition :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$; $a \prec b$

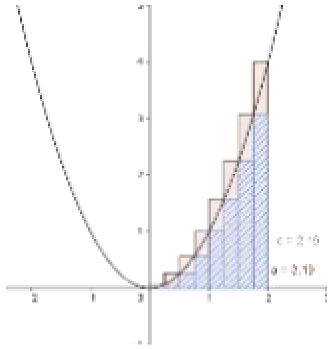
On pose : $s_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

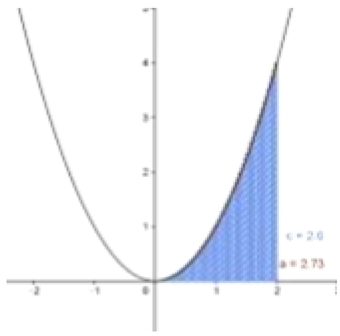
Les sommes s_n et S_n s'appelle les somme de Riemann.

Les suites $\left(s_n\right)_n$ et $\left(S_n\right)_n$ sont convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$$

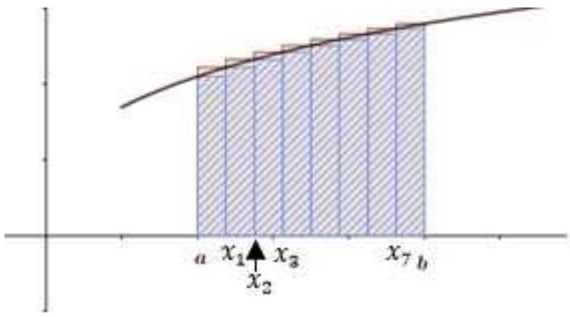


Pour n fixé



l'lorsque n augmente

Preuve :



On suppose que f est positive.

On pose : $x_0=a$ et $x_n=b$ et $x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}$

On a : $x_1-x_0=\frac{b-a}{n}$

$x_2-x_3=\frac{b-a}{n}$

$\vdots \qquad \vdots$

$x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$

En faisant la somme : $x_k-x_0=k\frac{b-a}{n}$

Or : $x_0=a$ donc : $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$

s_n est la somme des rectangles contenus dans le domaine ($\mathcal{D}$) la largeur de chaque rectangle est $\frac{b-a}{n}$ et sa longueur est : $f(x_k)=f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$

où $k \in \{0,1, \dots , n-1\}$

L'air de chaque rectangle est :

$a_k=\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ donc :

$$s_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

De même : S_n est la somme des rectangles qui contient le domaine ($\mathcal{D}$) la largeur de chaque rectangle est $\frac{b-a}{n}$ et sa longueur est :

$f(x_k)=f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$

où $k \in \{1,2, \dots , n\}$. L'air de chaque rectangle est :

$A_k=\frac{b-a}{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ donc :

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

On a : $S_n-s_n=\frac{b-a}{n}\left(f(x_n)-f(x_0)\right)$

(Tous les termes vont se simplifier sauf le premier et le dernier)

Or : $x_n=b$ et $x_0=a$ donc :

$$S_n-s_n=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n-s_n=0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n$

Finalement et puisque : l'aire du domaine ($\mathcal{D}$) est $\int_a^b f(x)dx$ (f positive) donc :

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx$$

Exemple1 :
En utilisant les somme de Riemann calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

Solution : Pour cet exemple il faut faire apparaitre les bornes (a et b) puis l'expression de la fonction f:
Si on factorise par n à l'intérieur de la somme on aura :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

et d'après cette expression on conclut que :

$a=0$ et $a=1$ et $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

On aura : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\left[ar\tan x\right]_0^1=ar\tan 1-ar\tan 0=\frac{\pi}{4}$$

Exemple2 :
En utilisant les somme de Riemann calculer :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Solution : 1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $f(x)=\frac{1}{x}$ et puisque f est continue sur $[1;2]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\left[\ln(x)\right]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

2) On pose (changement d'indice)

$j = k - n$ on obtient : $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n}$

$(n + k = n + j + n = 2n + j)$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=0$ et $b=1$ et $f(x)=\frac{1}{2+x}$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$

$$=\left[\ln(2+x)\right]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

3) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Exercices20 :

1)Calculer les limites des sommes suivantes :

$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par partie : $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} \left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire ln dans l'expression de u_n)

VII) DERIVATION DE $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

1) La fonction primitive d'une fonction continue sur *I* et qui s'annule en a

Considérons une fonction f continue sur I et $a \in I$. Soit F la fonction primitive de f sur I et qui s'annule en a on a :

$(\forall t \in I)(F'(t) = f(t))$ et par suite :

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^x F'(t)dt = \left[F(t)\right]_a^x = F(x) - F(a)$$

Donc : $\int_a^x f(t)dt = F(x)$

Propriété : Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$; la fonction F définie par :

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en a.

La fonction F est dérivable sur I

Et $(\forall x \in I)$ $(F'(x) = f(x))$

Exemple :

Déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

Solution : La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x) = \int_e^x \ln t\,dt$ On va procéder par une I.P.P

on a $[e;x]$

On pose : $u'(t)=1$ et $v(t)=\ln t$

Donc : $u(t)=t$ et $v'(t)=1/t$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[e;x]$ et u' et v' sont continue sur $[e;x]$

Donc :

$$F(x) = \int_e^x \ln t\,dt = \left[t\ln t\right]_e^x - \int_e^x t\times\frac{1}{t}dt = x\ln x - e - \int_1^e 1dt$$

$$F(x) = x\ln x - e - [t]_e^x = x\ln x - e - x + e = x\ln x - x$$

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est : $F(x) = x\ln x - x$

2) Dérivée de la fonction $\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle J, u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que : $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$. La fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur I et :$(\forall x \in I)(F'(x) = v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$

Preuve : $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$; Montrons que F est dérivable sur I et déterminons sa fonction dérivée.

Soit φ une fonction primitive de f sur J on a : φ est dérivable sur J et $(\forall x \in J)$ $(\varphi'(x) = f(x))$.

D'autre part :

$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \left[\varphi(t)\right]_{u(x)}^{v(x)}$

$= \varphi(v(x)) - \varphi(u(x)) = (\varphi o v)(x) - (\varphi o u)(x)$

La fonction $(\varphi o v)$ et $(\varphi o u)$ sont dérivables sur I car φ est dérivable sur J et u et v sont dérivable sur I et $u(I) \subset J$ et $v(I) \subset J$ et :

$F'(x) = (\varphi o v)'(x) - (\varphi o u)'(x)$

$= v'(x) \times \varphi'(v(x)) - u'(x) \times \varphi'(u(x))$

$= v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$

Exemple1 : étudier la dérivabilité de la fonction F définit par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

Solution :

est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $x \to \frac{1}{x}$ et $x \mapsto lnx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction f: $t \to e^{-t^2}$ est Continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f.

$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt = \left[\varphi(t)\right]_{\frac{1}{x}}^{\ln x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $F'(x) = (\varphi o v)'(x) - (\varphi o u)'(x)$

$= v'(x) \times \varphi'(v(x)) - u'(x) \times \varphi'(u(x))$

$= v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$

$= (\ln x)' e^{-(\ln x)^2} - \left(\frac{1}{x}\right)' e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$F'(x) = \frac{1}{x} e^{-(\ln x)^2} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$

Exemple : soit la fonction F définit par :

$F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t}\,dt$ $\forall x \in [-1;+\infty[$

1)Étudier la dérivabilité de la fonction F et calculer $F'(x)$ $\forall x \in [-1;+\infty[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Solution :

la fonction $x \to \sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1;+\infty[$ et la fonction: $v: x \to x^2+2x$ est est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$

donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$F'(x) = v'(x) f(v(x)) = 2(x+1)|x+1|$

2) $F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t}\,dt =$

$\int_0^{x^2+2x} (1+t)'(1+t)^{\frac{1}{2}}\,dt$

$= \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2+2x} = \left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^{x^2+2x}$

$F(x) = \frac{2}{3}(x+1)^2|x+1|$

Exemple2 : étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2}(t^2-4)\,dt$

Solution : la fonction: $t \to e^{t^2}(t^2-4)$ est Continue sur $\mathbb{R}$ donc Fest dérivable sur $\mathbb{R}$

$F'(x) = e^{x^2}(x^2-4)$ le signe de $F'(x)$est le signe de x^2-4 donc :

a)Sur $[2;+\infty[$ et $]-\infty;-2]$ F est croissante

b)Sur $[-2;2]$ F est décroissante

Exemple3 : soit h la fonction définie sur : $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $h(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = e^2$

1)Montrer que h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et en déduire que :

$H : x \to \int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)calculer : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$

Solution :1) $h(x)=\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$

$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$

On a $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2x)=\lim_{x\to 0}2\frac{\ln(1+2x)}{2x}=2$

Donc : $\lim_{x\to 0}h(x)=e^2=h(0)$ donc h est Continue

Et puisque h est la composée de fonction sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ continues alors h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $H : x \to \int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)on a: $H'\left(x\right)=h(x)-h(0)$

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt=H'\left(0\right)=e^2$

Exercice21 : Soit la fonction f définie sur]1, +∞[par (∀t ∈]0, +∞[ ) ($f(t)$ = $e^{\frac{1}{\ln t}}$

1) Etudier les variations de f sur]1, +∞ [.

2) Considérons la fonction définie sur]1, +∞ [par : $F(x)$ = $\int_x^{x+1} f\left(t\right)dt$

a) Montrer que (∀x ∈]1, +∞ [) :
($f(x+1) \le F(x) \le f(x)$)

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

3) a) Montrer que (∀t ∈]0, +∞[)($e^t \ge t+1$)

b) En déduire que : (∀x > 1) : ln

$F(x) - 1 \ge \int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt$

4)a) Montrer que : (∀t ∈]0, +∞[)($\ln t \le t-1$)

b) En déduire que (∀x > 1)($F(x) - 1 \ge \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) En déduire $\lim_{x\to 1^+} F(x)$

5) Montrer que F est dérivable sur]1, +∞[et calculer $F'(x)$ pour $x > 1$

6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F

7) Construire la courbe CF.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien