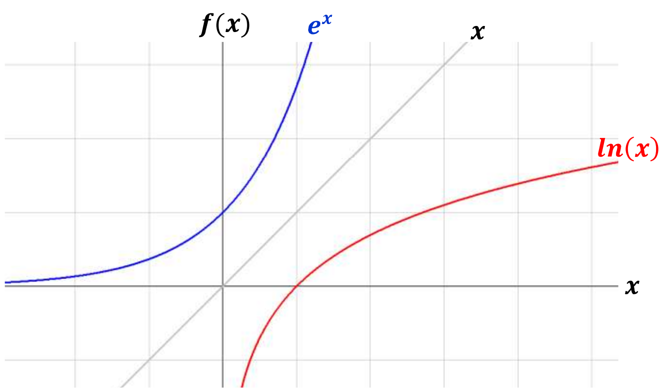
Analyse réelle

103 L'exponentielle & Le logarithme

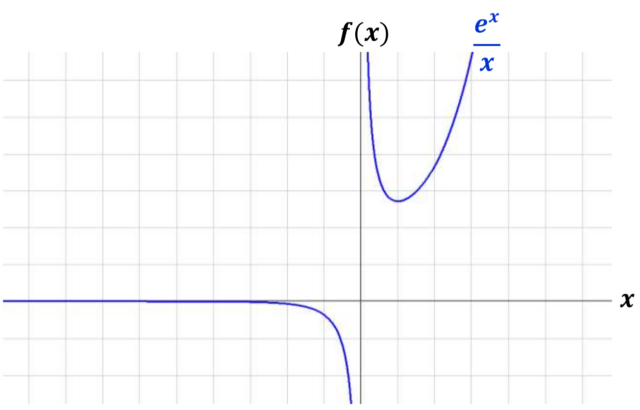


$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}}} e^x = x_0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}_+^*}} ln(x) = ln(x_0)$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

104 La fonction exp(x)/x :

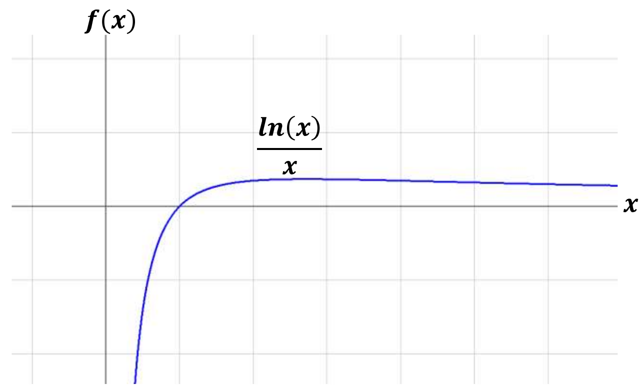


$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}^*}} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{x_0}}{x_0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

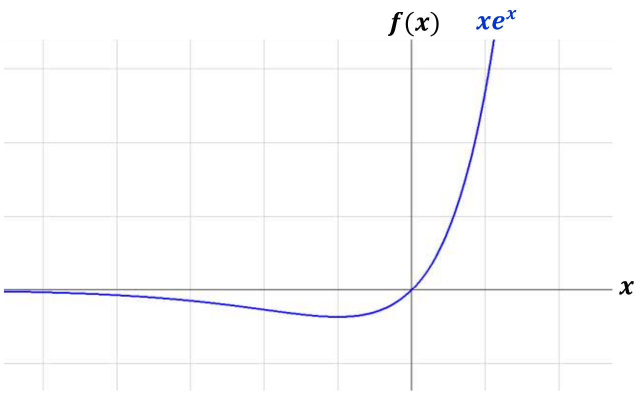
105 La fonction ln(x)/x :



$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0^+$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}_+^*}} \frac{ln(x)}{x} = \frac{ln(x_0)}{x_0}$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

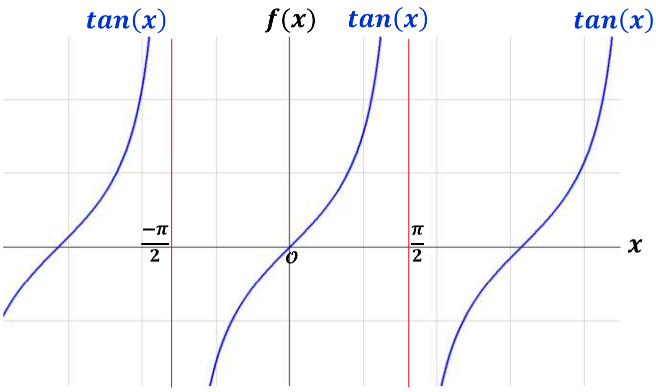
106 La fonction xexp(x) :



$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}}} xe^x = x_0e^{x_0}$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

107 La fonction tan(x) :

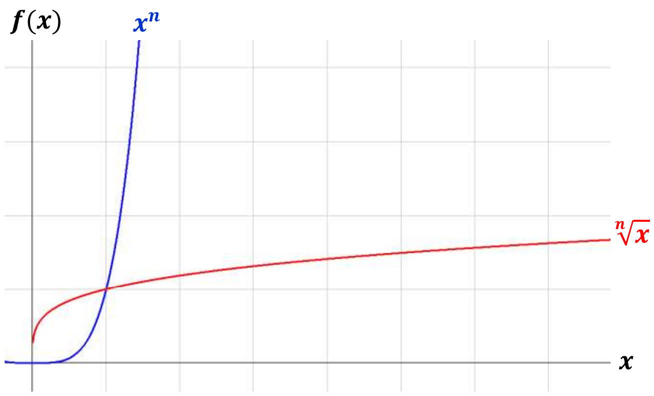


$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tan(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-} tan(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tan(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} tan(x) = -\infty}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

108 La fonction x^n :

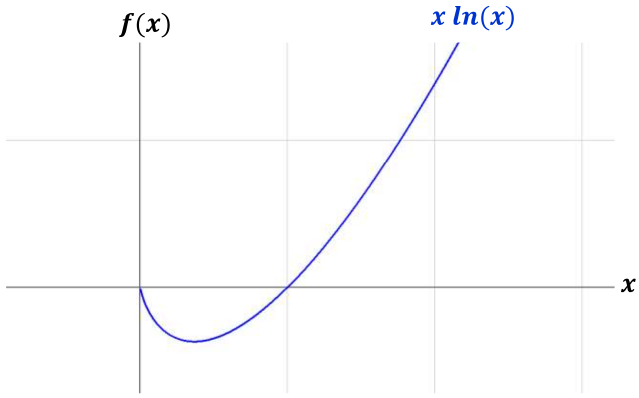


$$\boxed{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}}} x^n = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}}} \sqrt[n]{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \alpha>0}} n^\alpha = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \alpha<0}} n^\alpha = 0}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

109 La fonction xln(x) :

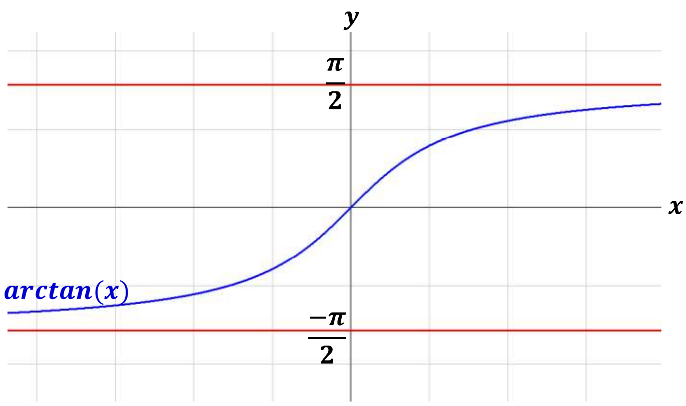


$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ ln(x) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ ln(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0\epsilon\mathbb{R}_+^*}} x\ ln(x) = x_0\ ln(x_0)}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

110 La fonction arctan(x) :



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}}$$

$$\boxed{(\forall\, x\,\epsilon\,\mathbb{R}) \quad ; \quad (arctan\ x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

111 Formes indéterminées :

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$

1^{∞} ; ∞^{0} ; 0^{0}

112 Règle de l'Hôpital :

$$La\ forme\ \boxed{\frac{0}{0}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

Les autres formes valables sont : $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$; $\boxed{0 \cdot \infty}$; $\boxed{+\infty - \infty}$

Les formes non-valables sont : $\boxed{0^0}$; $\boxed{\infty^0}$; $\boxed{1^\infty}$

113 Existence d'une primitive :

$$f\ continue\ sur\ I \quad \Longrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} f\ admet\ des \\ primitives\ sur\ I \end{array} \right.$$

114 Axe de Symétrie :

$$\left. \begin{array}{r} (C)\ est\ symétrique \\ par\ rapport\ à \\ (\Delta) :\ \ x = a \end{array} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \forall\, x \in D_f\ :\ (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{array} \right.$$

115 Centre de Symétrie :

$$\left. \begin{array}{r} (C)\ est\ symétrique \\ par\ rapport\ à \\ \Omega(a, b) \end{array} \right| \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \forall\, x \in D_f\ :\ (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{array} \right.$$

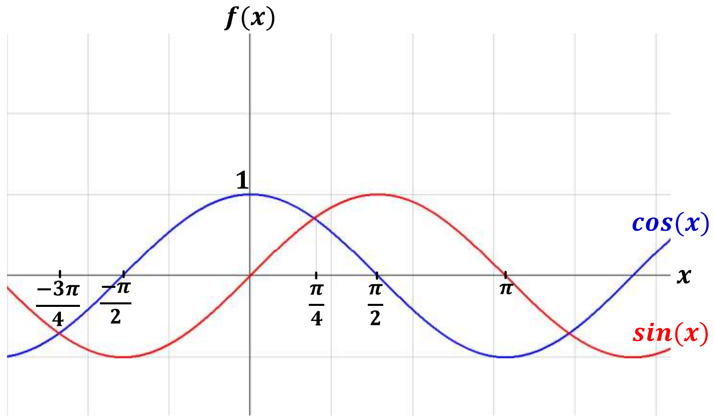
116 Fonction périodique :

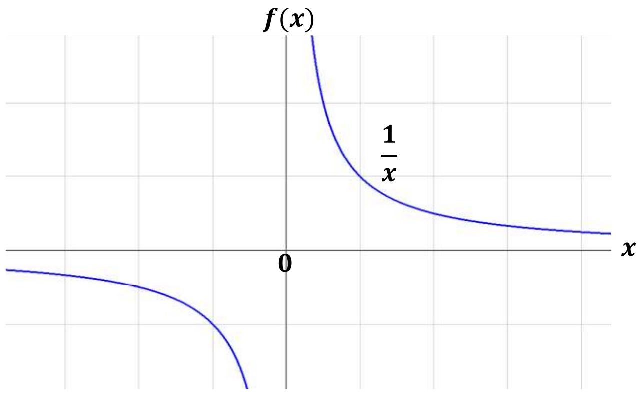
$$f\ est\ T - périodique \quad \Longleftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \forall\, x \in D_f\ :\ \begin{cases} (x + T) \in D_f \\ (x - T) \in D_f \end{cases} \\ f(x + T) = f(x - T) = f(x) \end{array} \right.$$

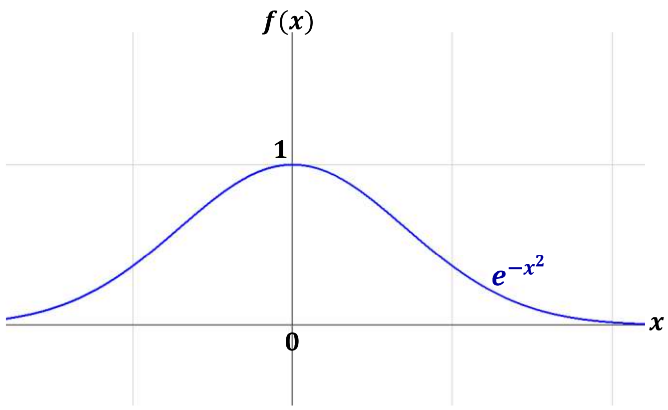
117 convexité d'une courbe :

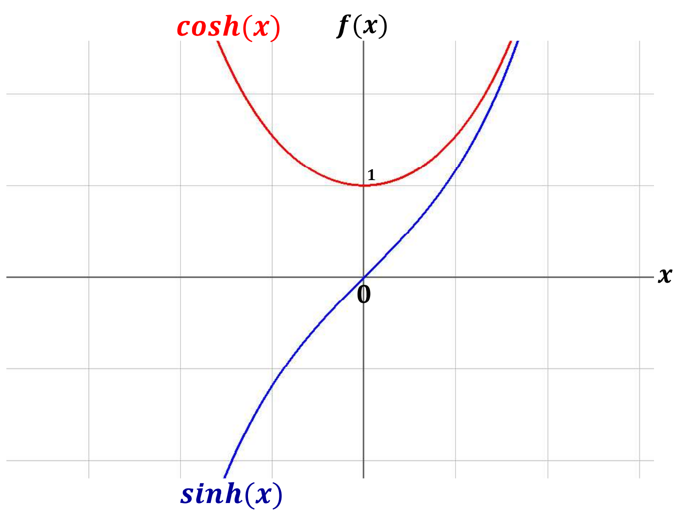
x	a	β	b
$f''(x)$	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe	Point d'inflexion	concave

118 Quelques fonctions usuelles :









119 Branches infinies :

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$ $\Leftrightarrow$ $(\Delta) : x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C)

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b}$ $\Leftrightarrow$ $(\Delta) : y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C)

$\left|\begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OY)

$\left|\begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OX)

$\left|\begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $(\Delta) : y = ax + b$ est une asymptote à la courbe (C)

$\left|\begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ (C) admet une branche parabolique suivant La droite $(\Delta) : y = ax$

120 Continuité en un point :

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$

121 Continuité d'une somme de fcts :

f est continue en x_0 ; g est continue en x_0 $\Rightarrow$ $(f+g)$ est continue en x_0

122 Continuité d'un produit de fcts :

f est continue en x_0 ; g est continue en x_0 $\Rightarrow$ $(f\times g)$ est continue en x_0

123 Continuité d'un quotient de fcts :

f est continue en x_0 ; g est continue en x_0 ; $g(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{f}{g}\right)$ est continue en x_0

124 Continuité d'une composition :

$f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est continue en x_0 . avec $x_0 \in I$; $f : J \longmapsto \mathbb{R}$ est continue en $f(x_0)$. avec $f(I) \subseteq J$ $\Rightarrow$ $g\circ f$ est continue en x_0

f continue sur I ; g continue sur J ; $f(I) \subseteq J$ $\Rightarrow$ $g\circ f$ est continue sur I

125 TVI – version générale :

f continue sur $[a,b]$; $y \in [f(a) ; f(b)]$ $\Rightarrow$ $\exists\, x \in [a,b]$; $f(x) = y$

$[f(a) ; f(b)]$ ou $[f(b) ; f(a)]$ Selon la monotonie de la fonction f.

126 TVI – version particulière :

f continue sur $[a,b]$; $f(a)\cdot f(b) \leq 0$ $\Rightarrow$ $\exists\, x \in [a,b]$; $f(x) = 0$

127 limites trigonométriques

- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$

128 Dérivabilité en un point :

f est dérivable en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = l \in \mathbb{R}$

129 Tableau des dérivées :

- $\forall x \in \mathbb{R}$; $(constante)' = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $(ax+b)' = a$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $(x^r)' = r\, x^{r-1}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall a > 0)$; $(a^x)' = a^x \ln(a)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $(e^x)' = e^x$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x)$
- $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $\forall x \neq k\pi$; $\left(cotan(x)\right)' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + cotg^2(x)\right)$
- $\forall x \in]-1;1[$; $\left(Arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in]-1;1[$; $\left(Arccos(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left(Arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

130 Dérivabilité ►► continuité :

f est dérivable en x_0 $\Rightarrow$ f est continue en x_0

131 Dérivée d'une composition :

$f : I \mapsto f(I)$ dériv sur I
$g : J \mapsto g(J)$ dériv sur $f(I)$
$f(I) \subseteq J$
$\Rightarrow$
$g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I
$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

132 Opérateur de dérivation :

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$
- $\left(f(g(x))\right)' = g'(x) \cdot f'(g(x))$

133 Monotonie (Variations) :

$f : I \mapsto f(I)$ est une fonction croissante sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in I^2$: oubien $\boxed{x > y \Rightarrow f(x) > f(y)}$ oubien $\boxed{x < y \Rightarrow f(x) < f(y)}$

$f : I \mapsto f(I)$ est une fct décroissante sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in I^2$: oubien $\boxed{x > y \Rightarrow f(x) < f(y)}$ oubien $\boxed{x < y \Rightarrow f(x) > f(y)}$

$f : I \mapsto f(I)$ est une fonction $\boxed{\text{croissante}}$ sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in I^2$: $f'(x) \geq 0$

$f : I \mapsto f(I)$ est une fonction $\boxed{\text{décroissante}}$ sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in I^2$: $f'(x) \leq 0$

134 Extrémums :

$\boxed{f \text{ admet un extrémum en } a}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f'(a) = 0}$

135 Fonction bijective :

f continue sur I
f est strictement monotone sur I
$\Rightarrow$ $f : I \mapsto f(I)$ est bijective

$f : I \mapsto f(I)$ est bijective $\Rightarrow$ f et f^{-1} ont les mêmes variations

$f : I \mapsto f(I)$ est bijective $\Rightarrow$ (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à $(\Delta) : y = x$

136 Dérivée de la fonction inverse :

f est dérivable sur l'intervalle I
$f' \neq 0$ sur I
$\Rightarrow$
f^{-1} est dérivable sur $f(I)$
$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$

137 Théorème de ROLLE :

f continue sur $[a,b]$
f dérivable sur $]a,b[$
$f(a) = f(b)$
$\Rightarrow$ $\exists c \in]a,b[$; $f'(c) = 0$

138 TAF – Égalité :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ cont sur } [a,b] \\ f \text{ déri sur }]a,b[\end{array}\right| \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\ ; \ \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = f'(c)$$

139 TAF – Inégalité :

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ cont sur } [a,b] \\ f \text{ déri sur }]a,b[\\ m \leq f'(x) \leq M \end{array}\right| \Rightarrow m \leq \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \leq M$$

140 Monotonie d'une suite numérique :

$$\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} \geq u_n} \Leftrightarrow \boxed{(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ est une suite } \nearrow}$$

$$\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ u_{n+1} \leq u_n} \Leftrightarrow \boxed{(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ est une suite } \searrow}$$

141 Suite arithmétique :

$$\boxed{(u_n)_n \text{ est arithmétique}} \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

$$\boxed{(u_n)_n \text{ est arithmétique}} \Leftrightarrow \boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_p + \cdots + u_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)} \ ; \ n \geq p$$

142 Suite géométrique :

$$\boxed{(u_n)_n \text{ est géométrique}} \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = q\, u_n}$$

$$\boxed{(u_n)_n \text{ est géométrique}} \Leftrightarrow \boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_p + \cdots + u_n = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} u_p} \ ; \ \left|\begin{array}{l} n \geq p \\ q \neq 1 \end{array}\right.$$

143 Suites & ordre :

$$\underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{+\infty}}}{u_n} \leq v_n \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = +\infty}$$

$$u_n \leq \underset{\substack{\searrow n\infty \\ \boxed{-\infty}}}{v_n} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = -\infty}$$

$$\underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{l}}}{v_n} \leq u_n \leq \underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{l}}}{w_n} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = l}$$

$$\underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{l}}}{u_n} > a \Rightarrow \boxed{l \geq a}$$

$$\underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{l}}}{u_n} < a \Rightarrow \boxed{l \leq a}$$

$$\underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{l}}}{u_n} < \underset{\substack{\swarrow n\infty \\ \boxed{l'}}}{v_n} \Rightarrow \boxed{l \leq l'}$$

144 Suite majorée ou minorée :

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n \text{ est croissante} \\ (u_n)_n \text{ est majorée} \\ (\, u_n \leq M \,) \end{array}\right| \Rightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } l \epsilon \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ (u_n)_n \text{ est minorée} \\ (\, u_n \geq m \,) \end{array}\right| \Rightarrow (u_n)_n \text{ converge vers } l \epsilon \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n \text{ est croissante} \\ (u_n)_n \text{ non}-\text{majorée} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ (u_n)_n \text{ non}-\text{minorée} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = -\infty}$$

145 la suite $(\alpha^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$:

$$\alpha > 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = +\infty}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = 1}$$

$$-1 < \alpha < 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = 0}$$

$$\alpha \leq -1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = n'\text{existe pas}}$$

146 la suite $(n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(n^{\alpha}) = +\infty}$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_*^- \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(n^{\alpha}) = 0}$$

147 convergence ►► bornée :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, M \in \mathbb{R}^+ \ ; \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ : \ |u_n| \leq M$$

148 La suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ conti sur } I \subseteq \mathbb{R} \\ f(I) \subseteq I \ ; \ u_0 \in I \\ \lim_{n\infty}(u_n) = l \in I \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(l) = l}$$

149 La suite récurrente $v_n = f(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{r} v_n = f(u_n) \\ f \text{ conti en } l \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\infty} u_n\right)}$$

Avec $\lim_{n\infty}(u_n) = l \in I$

150 Suites adjacentes :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} (u_n) \text{ est } \nearrow \ ; \ (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(v_n) = l \in \mathbb{R}$$

151 Résolution de l'équation différentielle :
$y' = ay \ ; \ a \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} y' = ay \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = a \\ &\Longrightarrow \quad \int \left(\frac{y'}{y}\right) dx = \int a\, dx \\ &\Longrightarrow \quad ln|y| + c_1 = ax + c_2 \\ &\Longrightarrow \quad e^{ln|y| + c_1} = e^{ax + c_2} \\ &\Longrightarrow \quad e^{c_1} \cdot |y| = e^{c_2} \cdot e^{ax} \\ &\Longrightarrow \quad y = \left(\pm \frac{e^{c_2}}{e^{c_1}}\right) \cdot e^{ax} \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{y = \lambda \cdot e^{ax} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Inversement : Si $y = \lambda \cdot e^{ax}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors : $y' = ay$

Finalement : les solutions de l'équation diffé $y' = ay$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent Sous la forme $y : x \longmapsto \lambda\, e^{ax}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

152 Résolution de l'équation différentielle :
$y' = ay + b \ ; \ a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} y' = ay + b \quad &\Leftrightarrow \quad (y' - 0) = a\left(y + \frac{b}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad Y' = aY \ ; \ Y = \left(y + \frac{b}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \alpha \cdot e^{ax} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y + \frac{b}{a}\right) = \alpha \cdot e^{ax} \ ; \ \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \left(\alpha\, e^{ax} - \frac{b}{a}\right) \ ; \ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

153 Résolution de l'équation différentielle :
$y'' + ay' + by = 0 \ ; \ a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0} \ ; \ a, b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} \ ; \ a, b \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \boxed{r \in \mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{y = (\alpha x + \beta)\, e^{rx}} \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} r_1 \in \mathbb{R} \\ r_2 \in \mathbb{R} \end{array}} \longrightarrow \boxed{y = \alpha\, e^{r_1 x} + \beta\, e^{r_2 x}} \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \boxed{(m \pm in) \in \mathbb{C}^2}$$

$$\boxed{y = \left(\alpha \cos(nx) + \beta \sin(nx)\right) e^{mx}} \ ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

154 Évaluation d'une intégrale :

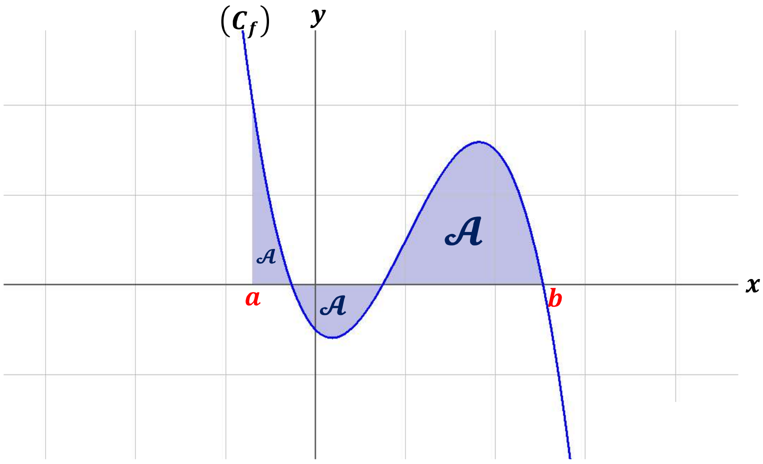
$$\int_a^b f(t)\, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Avec : f est continue sur I.
F est une primitive de f sur I.
$a, b \in I$.

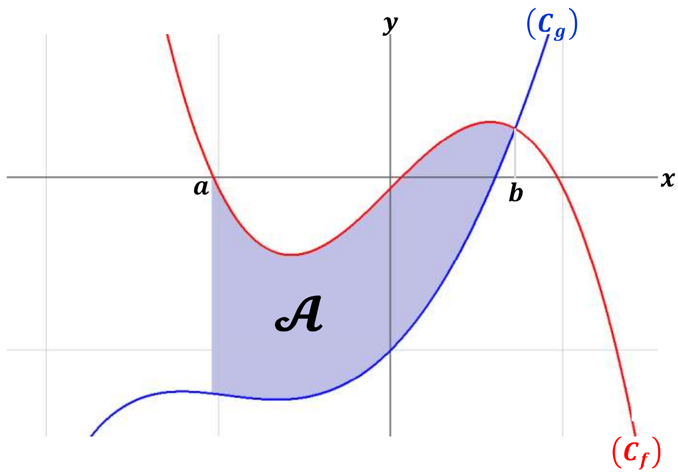
155 La fonction intégrale (primitive) :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } I \\ \text{et soit } a \in I \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \exists!\ \varphi = primitive(f) \text{ sur } I : \\ \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt \ ; \ \forall\, x \in I \\ \varphi(a) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \ ; \ \forall\, x \in I \end{array}\right.$$

156 Calcul d'aires :



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right) \quad \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$$



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx\right) \quad \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$$

157 Intégration par parties :

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Il faut faire attention à l'existence et la continuité des fonctions f et g' sur l'intervalle $[a, b]$.

158 Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} \underbrace{f\big(u(t)\big)}_{f(x)} \cdot \underbrace{u'(t)\,dt}_{dx}$$

Avec : $\left| \begin{array}{l} f \text{ continue sur } J \\ u \ : \ I \longmapsto J \\ \quad t \ \longmapsto \ x = u(t) \qquad \text{est une bijection} \\ u' \text{ est continue sur } I \, . \\ u(I) \subseteq J \end{array} \right.$

159 Intégration et Ordre :

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \leq g(x) \\ a \leq b \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Avec : f continue sur I et a et b appartiennent à I.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Avec : f continue sur I et $a \leq b$ appartiennent à I.

160 valeur médiane d'une fonction :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } I \\ a, b \in I \ ; \ a \leq b \\ \forall x \in [a, b] \ ; \ m \leq f(x) \leq M \end{array}\right| \ \Rightarrow \ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est la valeur médiane de la fonction f sur $[a, b]$.

161 Théorème de la médiane :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \text{avec } \ a < b \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \exists\, c \in [a, b] \ : \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \end{array}\right.$$

162 Solide de révolution autour de (ox) :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a, b] \\ \text{avec } \ a \leq b \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_S = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$$

Avec S est le solide de révolution de f autour de (OX).
Et l'unité de mesure est $\|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \|\vec{k}\|$.

163 Sommes de Riemann sur [a,b] :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Avec : f est continue sur $[a, b]$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

164 Sommes de Riemann sur [0,1] :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Avec : f est continue sur $[0,1]$.