Calcul De Probabilités

89 Hypothèse d'équiprobabilité :

$$\left.\begin{array}{r} L'hypothèse \\ d'équiprobabilité \\ est\ vérifiée \end{array}\right| \Leftrightarrow \forall\,(1 \le i \le n)\ \ ;\ p(\omega_i) = cte$$

Avec $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ est l'univers de toutes les éventualités possibles. Les expressions qui montrent que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée sont souvent : dé non truqué, boules similaires, identiques, boules indiscernables au toucher.

90 Probabilité d'un événement :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ d'issues\ vérifiant\ A}{nombre\ total\ de\ possibilités}$$

Avec : A est un événement dans une expérience aléatoire et Ω est l'univers de toutes les éventualités possible. Et l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée.

91 Dénombrer le card(Ω) :

$$\left.\begin{array}{r} Tirage\ au\ hasard\ spontané \\ de\ k\ boules\ parmi\ n\ autres \\ toutes\ identiques \end{array}\right| \Rightarrow card(\Omega) = C_n^k$$

$$\left.\begin{array}{r} Tirage\ au\ hasard\ successif \\ \underline{sans}\ remise\ de\ k\ boules\ parmi \\ n\ autres\ toutes\ identiques \end{array}\right| \Rightarrow card(\Omega) = A_n^k$$

$$\left.\begin{array}{r} Tirage\ au\ hasard\ successif \\ \underline{avec}\ remise\ de\ k\ boules\ parmi \\ n\ autres\ toutes\ identiques \end{array}\right| \Rightarrow card(\Omega) = n^k$$

$$\left.\begin{array}{r} Le\ nombre\ total \\ de\ combinaisons\ possibles \\ de\ n\ éléments. \end{array}\right| \Rightarrow card(\Omega) = n!$$

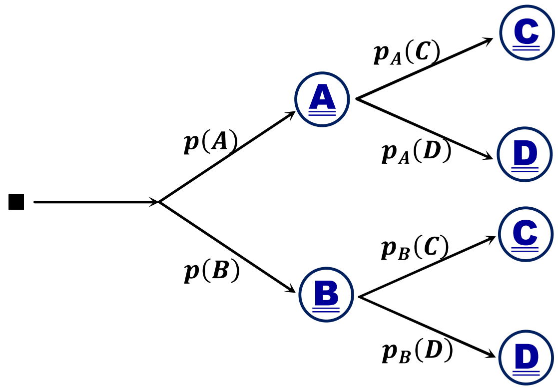
92 Répétition d'un événement :

Quand on répète indépendamment une expérience aléatoire n fois, Alors la probabilité de vérification d'un événement k fois est donnée par la formule :

$$p_k = C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Avec : $p = p(A)$ avant de répéter l'expérience n fois.

93 Probabilités composées :



- $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C)$
- $p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D)$
- $p(B \cap C) = p(B) \times p_B(C)$
- $p(B \cap D) = p(B) \times p_B(D)$

- $p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C)$
- $p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$

- $p_C(A) = \dfrac{p(A)}{p(C)} \times p_A(C)$
- $p_D(A) = \dfrac{p(A)}{p(D)} \times p_A(D)$
- $p_C(B) = \dfrac{p(B)}{p(C)} \times p_B(C)$
- $p_D(B) = \dfrac{p(B)}{p(D)} \times p_B(D)$

94 Triangle de Pascal - Binôme Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

95 Variable aléatoire :

Toute application $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$

est appelée variable aléatoire

Avec Ω est l'univers de toutes les éventualités possibles dans une expérience aléatoire $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

96 Loi de probabilité :

L'application $P_X : X(\Omega) \mapsto [0,1]$, $x_i \mapsto P_X(x_i) = p[X = x_i]$

s'appelle la loi de probabilité de la variable X.

97 Espérance Mathématique :

l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre E(X) défini ainsi :

$$\overline{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \cdot x_i$$

$\overline{X}$ représente La valeur moyenne de X.

soit la variable aléatoire $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i$

et la loi de proba $p_X : X(\Omega) \mapsto [0,1]$, $x_i \mapsto p_X(x_i) = p[X = x_i]$

98 Variance & Covariance :

La variance de la variable aléatoire X est le nombre positif V(X) défini ainsi :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \cdot (x_i - \overline{X})^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

La covariance de la variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$V(X)$ mesure le rapprochement ou l'éloignement des valeurs de X autour de la valeur moyenne $\overline{X}$.

99 Fonction de répartition :

L'application $F : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$, $x \mapsto p_X(X < x)$

s'appelle la fonction de répartition de la var X.

Avec X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P_X).

100 Intersection et Réunion d'événements

- $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

101 Sommes classiques

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$; $n \in \mathbb{N}^*$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$; $n \in \mathbb{N}^*$

102 Quelques lois discrètes

Loi uniforme $\mathcal{U}(n)$: $P_X : \{1, 2, \cdots, n\} \mapsto]0,1]$, $k \mapsto p(X = k) = \frac{1}{n}$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $P_X : \{0, 1\} \mapsto]0,1]$, $k \mapsto p(X = k) = p^k \times (1-p)^{1-k}$

Loi Binomiale $\mathfrak{B}(n,p)$: $P_X : \{0, 1, 2, \cdots, n\} \mapsto]0,1]$, $k \mapsto p(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$: $P_X : \mathbb{N} \mapsto]0,1]$, $k \mapsto p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Loi Hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N, p)$: $P_X : \{0, 1, 2, \cdots, n\} \mapsto]0,1]$, $k \mapsto p(X = k) = \frac{C_{Np}^k\, C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}$

Loi Géométrique $\mathcal{G}(p)$: $P_X : \mathbb{N} \mapsto]0,1]$, $k \mapsto p(X = k) = p(1-p)^{k-1}$