Nombres Complexes

35 Parties réelle et imaginaire :

$$\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0$$

$$\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R} \iff \mathcal{Re}(z) = 0$$

$$z = z' \iff \begin{vmatrix} \mathcal{Re}(z) = \mathcal{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z') \end{vmatrix}.$$

$$\mathcal{Re}(z + \lambda z') = \mathcal{Re}(z) + \lambda\, \mathcal{Re}(z')$$

$$\mathfrak{Im}(z + \lambda z') = \mathfrak{Im}(z) + \lambda\, \mathfrak{Im}(z')$$

Avec λ est un réel.

36 affixe d'un vecteur dans le plan :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)$$

$$aff(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = aff(\vec{u}) + \lambda\, aff(\vec{v})$$

Ça s'écrit aussi sous : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
Et encore : $z_{\vec{u}+\lambda\vec{v}} = z_{\vec{u}} + \lambda\, z_{\vec{v}}$.
Avec λ est un nombre réel.

37 Colinéarité de trois points :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont colinéaires} \iff \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$

38 Affixe d'un Barycentre :

$$G = Bary\{(A_i\,;\,\alpha_i)\} \iff aff(G) = \frac{\sum_i \alpha_i\, aff(A_i)}{\sum_i \alpha_i}$$

39 Conjugué d'un nombre complexe :

$$z = \mathcal{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) \iff \bar{z} = \mathcal{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$$

40 Relations de conjugaison :

$$z \times \bar{z} = (\mathcal{Re}(z))^2 + (\mathfrak{Im}(z))^2 \in \mathbb{R}^+$$

$$z + \bar{z} = 2\,\mathcal{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$$

41 Distribuer la conjugaison :

$$\overline{z + \lambda z'} = \bar{z} + \lambda\overline{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \;;\; z' \neq 0$$

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0$$

Avec P est un polynôme à coefficients réels.

42 Module d'un nombre complexe :

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{(\mathcal{Re}(z))^2 + (\mathfrak{Im}(z))^2}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

$$|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z| \quad et \quad |\mathcal{Re}(z)| \leq |z|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \;;\; z' \neq 0$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

43 Argument d'un nombre complexe :

$$arg(-z) \equiv \pi + arg(z)\ [2\pi]$$

$$arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)\ [2\pi]$$

$$arg(z) \equiv 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}$$

$$arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$$

$$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)\ [2\pi]$$

$$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$$

$$arg(z^n) \equiv n \cdot arg(z)\ [2\pi] \;;\; n \in \mathbb{N}$$

$$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi] \;;\; \begin{vmatrix} A \neq B \\ C \neq D \end{vmatrix}.$$

$$\overline{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)\ [2\pi] \;;\; \begin{vmatrix} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{vmatrix}.$$

44 Forme trigonométrique - exponentielle :

$$z = |z| \cdot (cos(\theta) + i\, sin(\theta)) = |z| \cdot e^{i\theta}$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

$$(r\, e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Avec : $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}^*$

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} |z| = |z'| \\ arg(z) \equiv arg(z')\ [2\pi] \end{array} \right.$$

45 Colinéarité de deux vecteurs :

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont} \\ \text{colinéaires} \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) \in \mathbb{R}$$

Avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

46 Parallélisme :

$$(AB) \parallel (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$

Avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

47 Perpendicularité :

$$(AB) \perp (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$$

Avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

48 Points cocycliques :

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \times \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oubien } A, B, C, D \text{ colinéaires} \\ \text{oubien } A, B, C, D \text{ cocycliques} \end{array} \right.$$

Avec A,B,C et D sont différents 2à2.

49 Formules d'Euler :

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

50 Racines nièmes d'un nombre complexe :

$$z^n = a = |a|\, e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \ ; \ \left| \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{array} \right. \right\}$$

On dit que z est une racine nième du nombre complexe a.

51 Zéros d'un polynôme :

$$\left.\begin{array}{r} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les zéros} \\ \text{du polynôme } az^2 + bz + c = 0 \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} z_1 + z_2 = \boxed{\frac{-b}{a}} \\ z_1 \times z_2 = \boxed{\frac{c}{a}} \end{array} \right.$$

Avec a,b,c sont des nombres complexes.

52 Translation :

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad z_{M'} = z_M + z_{\vec{v}}$$

53 Homothétie :

$$H_{(\Omega,k)}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad (z_{M'} - z_\Omega) = k(z_M - z_\Omega)$$

54 Rotation :

$$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad (z_{M'} - z_\Omega) = e^{i\theta}(z_M - z_\Omega)$$

55 La transformation φ(z) = az + b :

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi \equiv T_{\vec{u}(b)}$$

$$a \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\} \quad \Rightarrow \quad \varphi \equiv H_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)\, ;\, a\right)}$$

$$a = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \varphi \equiv R_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)\, ;\, \theta\right)}$$

$$a = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad \varphi \equiv R \circ H = H \circ R \ ; \ \left| \begin{array}{l} R \equiv R_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right); \theta\right)} \\ H \equiv H_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right); r\right)} \end{array} \right.$$