**Exercices d'applications et de réflexions *sur* les Lois de composition interne**

**PROF : ATMANI NAJIB** 2ème BAC Sciences maths

http://www.xriadiat.com

# *Exercices AVEC SOLUTIONS*

# *Structures algébriques(partie1)*

**Exercice1 :** montrer on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

**Solution :**

| + | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};+\right)$

| $\times$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{4}$ | $\overline{3}$ | $\overline{2}$ | $\overline{1}$ |

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};\times\right)$

on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}$ on remarque bien que ce sont des lois de compositions internes

**Exercice2 :** on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation $\mathrm{T}$ tel que : $x\mathrm{T}y=\frac{x+y}{1+xy};\forall(x;y)\in\left]-1;1\right[^2$

Monter que $\mathrm{T}$ est une loi de composition interne Dans $]-1;1[$

**Solution :** soit $x\in]-1;1[$ et $y\in]-1;1[$

Montrons que : $x\mathrm{T}y=\frac{x+y}{1+xy}\in]-1;1[$ ?

Calculons : $1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1+xy)^2}=\frac{x^2y^2+2xy+1-x^2-y^2-2xy}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{1-x^2-y^2(1-x^2)}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2=\frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2}=\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}$$

Or $x\in]-1;1[$ et $y\in]-1;1[$ donc : $|x|\prec1$ et $|y|\prec1$

donc : $x^2\prec1$ et $y^2\prec1$ on a donc : $1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2\succ0$

donc : $\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2\prec1$ donc : $\sqrt{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\prec\sqrt{1}$

donc : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right|\prec1$ donc : $-1\prec\frac{x+y}{1+xy}\prec1$

donc : $\frac{x+y}{1+xy}\in]-1;1[$ cqfd

**Exercice3 :** on considére la matrice suivante : $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ calculer $A^2$ et $A^3$ et en déduire $A^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

**solution :**

$$A^2 = A\times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par recurrence que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ vraie si n=1

b)supposons que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c)montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

$$A^{n+1} = A^n\times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

**Exercice4 :**on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y = xy-3x-3y+12$ ;

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et soit : $S = ]3;+\infty[$

Monter que $S$ est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

**Solution** : soit $x\in S$ et $y\in S$

Montrons que : $x*y\in S$ ?

$x*y-3 = xy-3x-3y+9 = x(y-3)-3(y-3)$

$x*y-3 = (y-3)(x-3)$

or $x\in S = ]3;+\infty[ \Leftrightarrow x\succ 3$ et $y\in ]3;+\infty[ \Leftrightarrow y\succ 3$

donc : $x*y-3\succ 0$ donc : $x*y\in ]3;+\infty[ = S$ cqfd

donc : $S$ est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

**Exercice5 :**1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b = a+b-3ab$ ; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

**2)** on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $\mathrm{T}$ définit par : $(a;b)\mathrm{T}(x;y) = (ax;ay+b)$ ; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

et $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $\mathrm{T}$ est ni commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$

**Solution:**1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b = a+b-3ab = b+a-3ba = b*a$

Donc : $*$ est commutative

b)

$(a*b)*c = (a+b-3ab)*c = a+b-3ab+c-3(a+b-3ab)c$

$(a*b)*c = a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

et on a :

$a*(b*c) = a*(b+c-3bc) = a+(b+c-3bc)-3a(b+c-3bc)$

$a*(b*c) = a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

Donc : $(a*b)*c = a*(b*c)$

Donc : $*$ est associative

2)a)on a : $(1;3)\mathrm{T}(2;0) = (1\times 2;1\times 0+3) = (2;3)$

$(2;0)\mathrm{T}(1;3) = (2\times 1;2\times 3+0) = (2;6)$

Donc : $(1;3)\mathrm{T}(2;0)\neq(2;0)\mathrm{T}(1;3)$ donc : $\mathrm{T}$ n'est pas commutative

b)

$((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7) = (2;6)\mathrm{T}(5;7) = (2\times 5;2\times 7+6) = (10;20)$

$(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))=(1;3)\mathrm{T}(2\times5;2\times7+0)=(1;3)\mathrm{T}(10;14)$

$(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))=(1\times10;1\times14+3)=(10;17)$

Donc : $((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7)\neq(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))$

donc : $\mathrm{T}$ n'est pas associative

**Exercice6 :** on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab-(a+b)+2$ ; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

**2)** Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner les élements symétrisables

**Solution:**1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b=ab-(a+b)+2=ba-(b+a)+2=b*a$

Donc : $*$ est commutative

2)a) $\forall a\in\mathbb{R}$ : $2*a=2a-(2+a)+2=a$ et

$a*2=2a-(a+2)+2=a$

Donc 2 est l'élément neutre pour la loi $*$

b)soit $a\in\mathbb{R}$ on cherche $a'\in\mathbb{R}$ tel que : $a*a'=2$( $*$ est commutative) ?

$a*a'=2\Leftrightarrow aa'-(a+a')+2=2\Leftrightarrow a'(a-1)=a$

Si : $a=1$ alors : $0=1\Leftrightarrow a*a'=2$ donc impossible

Si : $a\neq1$ alors : $a'=\dfrac{a}{a-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a*a'=2$

Donc : $\forall a\in\mathbb{R}-\{1\}$ il admet un symétrique

$a'=\dfrac{a}{a-1}$

**Exercice7 :** on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=xy-4x-4y+20$ ;

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ 1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

3) determiner les élements symétrisables s'il existent

**Solution:**1) Soit : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $x*y=xy-(x+y)+2=yx-(y+x)+2=y*x$

Donc : $*$ est commutative

2) si l'élement neutre existe alors $\forall x\in\mathbb{R}$ : $e*x=x$ ($*$ est commutative)

$\forall x\in\mathbb{R}$ : $e*x=x\Leftrightarrow xe-4x-4e+20=x$

$\Leftrightarrow x(e-5)-4e+20=0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}e-5=0\\-4e+20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e=5\\e=5\end{cases}$

Donc 5 est l'élément neutre pour la loi $*$

3)soit $x\in\mathbb{R}$ on cherche $x'\in\mathbb{R}$ tel que : $x*x'=5$( $*$ est commutative) ?

$x*x'=5\Leftrightarrow xx'-4x-4x'+20=5\Leftrightarrow x'(x-4)=4x-15$

Si : $x=4$ alors : $0=1$ donc impossible

Si : $x\neq4$ alors : $x'=\dfrac{4x-15}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x*x'=5$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{4\}$ il admet un symétrique

$x'=\dfrac{4x-15}{x-1}$

**Exercice8 :** on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+4y-1$ ;$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1) la loi $*$ est-elle commutative ?

2) la loi $*$ admet -elle un élement neutre et determiner le s'il existe

**Solution:**1) On a : $0*1=0+4\times1-1=3$

$1*0=1+4\times0-1=0$

$0*1\neq1*0$

Donc : $*$ est non commutative

2) si l'élement neutre existe alors $\forall x\in\mathbb{R}$ : $e*x=x*e=x$

$\forall x\in\mathbb{R}$ : $e*x=x\Leftrightarrow e+4x-1=x$

$\Leftrightarrow3x+e-1=0\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}3=0\\e-1=0\end{cases}$

Donc impossible

Donc la loi $*$ n'admet pas d'élements neutres

**Exercice9 :** on considére les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2-2A+I_2=0$ et en déduire que

La matrice $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$

2) calculer : $B^2$ et $B^3$ et en déduire que

La matrice $B$ n'admet pas d'inverse

**Solution**

1) on a : $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

et $-2A+I_2=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

donc : $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$

$A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow A(A-2I_2)=-I_2 \Leftrightarrow A(2I_2-A)=I_2$

Et $A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2I_2-A)A=I_2$

Donc : $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}=2I_2-A$

$A^{-1}=2I_2-A=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2)

$B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$B^3=B\times B^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Donc : $B^3=0_3$

On suppose que $B$ admet un inverse donc il existe une matrice $C$ tel que : $BC=CB=I_3$

Donc : $BC=I_3 \Rightarrow B^2BC=B^2I_3 \Rightarrow 0_3\times C=B^2$

$\Rightarrow 0_3=B^2$ or $B^2\neq 0_3$ contradiction

Donc : $B$ n'admet pas d'inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

**Exercice10 :** on considére les matrices suivantes : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1) calculer : $A^2$ et $A^3$ et en déduire que

2) Montrer que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : $(A-I_2)^2=0_2$ avec $0_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4) en déduire que La matrice $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$

**Solution**

1) on a : $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^3\times A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2) Montrer par récurrence que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$ vraie si n=0

supposons que : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

montrons que : $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2n+2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ?

$A^{n+1}=A^n\times A=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2n+2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Donc : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrons que : $(A-I_2)^2=0_2$

$(A-I_2)^2=\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$(A-I_2)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0_2$

4)On a : $(A-I_2)^2=0_2 \Leftrightarrow A^2-2A+I_2=0_2$

$\Leftrightarrow A(2I_2-A)=(2I_2-A)A=I_2$

Donc : $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}=2I_2-A$

$$A^{-1}=2I_2-A=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

**Exercice11 :** on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{2}\\ b\sqrt{2} & a\end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{Z}^2 \text{et } a^2\text{-2b}^2=1\right\}$$

Monter que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

**Solution** : soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(x;y)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{2}\\ b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}$ et $a^2\text{-2b}^2=1$

Et : $M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}x & y\sqrt{2}\\ y\sqrt{2} & x\end{pmatrix}$ et $x^2\text{-2y}^2=1$

Montrons que : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$ ?

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{2}\\ b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x & y\sqrt{2}\\ y\sqrt{2} & x\end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}ax+2by & (ay+bx)\sqrt{2}\\ (ay+bx)\sqrt{2} & ax+2by\end{pmatrix}$$

Donc : $\boldsymbol{M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=M_{(ax+2by;ay+bx)}}$

$(ax+2by;ay+bx)\in\mathbb{Z}^2$

Car $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

Et on a :

$$(ax+2by)^2-2(ay+bx)^2=\left(a^2x^2+4b^2y^2+4abxy\right)$$

$$-2\left(a^2y^2+b^2x^2+2abxy\right)=\left(a^2x^2-2a^2y^2\right)-2\left(2b^2y^2-b^2x^2\right)$$

$$=a^2\left(x^2-2y^2\right)-2b^2\left(x^2-2y^2\right)=\left(x^2-2y^2\right)\left(a^2-2b^2\right)=1\times1=1$$

donc : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$

donc : $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

**Exercice12 :** soit l'application : $f:(\mathbb{Z};+)\to(\mathbb{Z}^*;\times)$, $x\mapsto 5^x$

montrons que $f$ est un morphisme de ($\mathbb{Z}$ , +) dans ($\mathbb{Z}^*$ , $\times$)

**Solution :** $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$f(x+y)=5^{x+y}=5^x\times5^y=f(x)\times f(y)$ donc : $f$ est un morphisme de ($\mathbb{Z}$ ,+) dans ($\mathbb{Z}^*$ , $\times$)

**Exercice13 :** soit l'application : $g:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\ln x$

montrons que $g$ est un morphisme de :

($]0;+\infty[$ , $\times$)dans ($\mathbb{R}$ , +)

**Solution :** $\forall(x;y)\in]0;+\infty[^2$

$$g(x\times y)=\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)=g(x)+g(y)$$

donc : $g$ est un morphisme de ($]0;+\infty[$ , $\times$) dans ($\mathbb{R}$ , +)

**Exercice14:** soit l'application : $h:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $z\mapsto|z|$

montrons que $h$ est un morphisme de : ($\mathbb{C}$ , $\times$)dans ($\mathbb{R}$ , $\times$)

**Solution :** $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$h(z\times z')=|z\times z'|=|z|\times|z'|=h(z)\times h(z')$ donc : $f$ est un morphisme de ($\mathbb{C}$ , $\times$)dans ($\mathbb{R}$ , $\times$)

**Exercice15 :** soit l'application :

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$

$\theta\mapsto e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

montrons que $k$ est un morphisme de : ($\mathbb{R}$ , $+$) dans ($\mathbb{C}^*$ , $\times$)

**Solution :** $\forall(\theta;\theta')\in\mathbb{R}^2$

$$k(\theta+\theta')=e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta+i\theta'}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=k(\theta)\times k(\theta')$$

donc : $k$ est un morphisme de ($\mathbb{R}$ , $+$) dans ($\mathbb{C}^*$ , $\times$)

**Exercice16 :**soit l'application : $\begin{array}{l} l:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R}) \\ x\mapsto \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$

montrons que $l$ est un morphisme de : $(\mathbb{R}\ ,\ +)$ dans $(M_2(\mathbb{R})\ ,\ \times)$ **Solution :** $\forall(x;x')\in\mathbb{R}^2$

on a : $l(x+x')=\begin{pmatrix}1 & x+x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$l(x)\times l(x')=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Donc : $l(x+x')=l(x)\times l(x')$

donc : $k$ est un morphisme de $(\mathbb{R}\ ,\ +)$ dans $(M_2(\mathbb{R})\ ,\ \times)$

**Exercice17:**soit $f$ l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ n\mapsto \overline{2^n}\end{array}$

montrons que $f$ est un morphisme de $(\mathbb{N}\ ,\ +)$ dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ ,\ \times)$

**Solution :** $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$

$f(n+m)=\overline{2^{n+m}}=\overline{2^n\times 2^m}=\overline{2^n}\times\overline{2^m}=f(n)\times f(m)$

donc : $f$ est un morphisme de $(\mathbb{N}\ ,\ +)$ dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ ,\ \times)$

**Exercice18 :**on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$ ; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

Soit $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})=\left\{f_{(a;b)}\ /\ \forall x\in\mathbb{R}:f_{(a;b)}(x)=ax+b\right\}$

Soit l'application : $\varphi$ : $\begin{array}{l}\varphi:\mathbb{R}^2\to A(\mathbb{R};\mathbb{R})\\ (a;b)\mapsto f_{(a;b)}\end{array}$

Montrer que : $\varphi$ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2\ ,\ +)$ dans $(A(\mathbb{R};\mathbb{R})\ ,\ +)$

**Solution:**1) Soit : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

On a :

$\varphi((a;b)+(a';b'))=\varphi(a+a';b+b')=f_{(a+a';b+b')}$

$f_{(a+a';b+b')}(x)=(a+a')x+(b+b')=(ax+b)+(a'x+b')$

Donc : $\varphi((a;b)+(a';b'))=\varphi(a;b)+\varphi(a';b')$

donc : $\varphi$ est un morphisme de $(\mathbb{R}^2\ ,\ +)$ dans $(A(\mathbb{R};\mathbb{R})\ ,\ +)$

**Exercice19 :**soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

On pose : $a*b=(a-2)(b-2)+2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2)soit l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers $I$

tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}\quad\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

a) montrer que $f$ est un morphisme de $(\mathbb{R}^{*+}\ ,\ \times)$ dans $(I\ ,\ *)$

b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

**solution :**1) soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

$a\in]2;+\infty[\Rightarrow a\succ 2$ et $b\in]2;+\infty[\Rightarrow b\succ 2$

Donc : $(a-2)(b-2)\succ 0$

Donc : $(a-2)(b-2)+2\succ 2$

Donc : $a*b\in]2;+\infty[=I$

Donc :$*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2) soient $x \in \mathbb{R}^{*+}$ et $y \in \mathbb{R}^{*+}$

$$f(x \times y) = \frac{2xy+1}{xy}$$

$$f(x) * f(y) = \frac{2x+1}{x} * \frac{2y+1}{y} = \left(\frac{2x+1}{x} - 2\right)\left(\frac{2y+1}{y} - 2\right) + 2$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{y} + 2 = \frac{2xy+1}{xy}$$

Donc : $f(x \times y) = f(x) * f(y)\ \forall (x;y) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$

Donc : $f$ est un morphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ dans $(I, *)$

b)puisque $\times$ est commutative dans $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$et $f$ un homomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ dans $(I, *)$

alors $*$ est commutative dans $I$

et on a 1 est l'élément neutre dans $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$

alors : $f(1) = 3$ est l'élément neutre dans $I$

**Exercice20 :**on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1)$ ; $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ n'est pas associative

3) est ce que la loi $*$ admet un élement neutre ?

4)resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2 * x = 5$ b) $x * x = 1$

**Solution:**1) Soit : soit :$(a;b) \in \mathbb{R}^2$

On a : $a * b = ab + (a^2 - 1)(b^2 - 1) = ba + (b^2 - 1)(a^2 - 1)$

car la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative

Donc :$a * b = b * a$ par suite $*$ est commutative

2) on a : $(-1 * 0) * 2 = 0 * 2 = -3$

Et $-1 * (0 * 2) = -1 * -3 = 3$

Donc : $(-1 * 0) * 2 \neq -1 * (0 * 2)$

Donc : $*$ n'est pas associative

3)on a : $a * 1 = 1 * a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Donc : 1 est l'élément neutre pour la loi $*$

(l'élement neutre est unique)

4) a)on va resudre l'équation : $2 * x = 5$

$$2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2 - 1) = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \frac{4}{3}$ donc : $S = \left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$

b)on va resudre l'équation : $x * x = 1$

$$x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

donc : $S = \{-1; 0; 1\}$

**Exercice21 :**on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b) * (a';b') = (a \times a'; b \times b')$ ;

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (a';b') \in \mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables Pour la loi $*$

3)soit : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

a)montrer que $S$ est une partie stable de$(\mathbb{R}^2, *)$

b) Monter que $(S, *)$ admet un élement neutre et comparer les les élements neutres de $(\mathbb{R}^2, *)$ et de $(S, *)$

**Solution:**1) a) Montrons que $*$ est commutative ?

Soit : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a';b') \in \mathbb{R}^2$

$$(a;b) * (a';b') = (a \times a'; b \times b') = (a' \times a; b' \times b) = (a';b') * (a;b)$$

Donc :$*$ est commutative

b) Montrons que $*$ est associative?

Soit: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a';b') \in \mathbb{R}^2$ et$(a'';b'') \in \mathbb{R}^2$

$$((a;b) * (a';b')) * (a'';b'') = (a \times a'; b \times b') * (a'';b'')$$

$\left((a;b)*(a';b')\right)*(a'';b'')=(a\times a'\times a'';b\times b'\times b'')$

On aussi : $(a;b)*\left((a';b')*(a'';b'')\right)=(a;b)*(a'\times a'';b'\times b'')$

$(a;b)*\left((a';b')*(a'';b'')\right)=(a\times a'\times a'';b\times b'\times b'')$

Donc :

$\left((a;b)*(a';b')\right)*(a'';b'')=(a;b)*\left((a';b')*(a'';b'')\right)$

Donc : $*$ est associative

2)a) Montrons que $*$ admet un élement neutre

Soit: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $(a;b)*(1;1)=(a;b)\quad\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Et puisque :$*$ est commutative

Alors : $*$ admet un élement neutre c'est $(1;1)$

b) determinons dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables pour la loi $*$

soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ on cherche $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$(a;b)*(a';b')=(1;1)$

$(a;b)*(a';b')=(1;1)\Leftrightarrow(a\times a';b\times b')=(1;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b\times b'=1\\ a\times a'=1\end{cases}$ si $a\neq0$ et $b\neq0$ alors $\begin{cases}a'=1/a\\ b'=1/b\end{cases}$

Donc les élements dans $\mathbb{R}^2$ symétrisablesPour la loi $*$ sont les couples $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que: $a\neq0$ et $b\neq0$

Et le symétrique de $(a;b)$ est $\left(1/a;1/b\right)$ pour $*$

3)a) $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

Soit : $(a;0)\in S$ et $(b;0)\in S$

$(a;0)*(b;0)=(ab;0)\in S$

Donc : $S$ est une partie stable de($\mathbb{R}^2$ ,$*$)

b) soit :$(a;0)\in S$

on a : $(a;0)*(1;0)=(a;0)$ et $(1;0)*(a;0)=(a;0)$

donc : $(1;0)$ est élément neutre pour ( $S$ ,$*$)

et on a $(1;1)$ est élément neutre pour($\mathbb{R}^2$ ,$*$)

et : $(1;1)\neq(1;0)$

**Exercice22 :**on muni $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T suivante : $zTz'=z\overline{z'}$ ; $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

**Solution :**

1) la commutativité de T ?

On a : $1Ti=1\overline{i}=-i$ et $iT1=i\overline{1}=i$

Donc : $1Ti\neq iT1$ donc T non commutative

L'associativité de T ?

$(iT1)Ti=iTi=i\cdot(-i)=1$

$iT(1Ti)=iT-i=i\cdot i=-1$

Donc : $(iT1)Ti\neq iT(1Ti)$ donc T non associative

2)résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

$(zTz)Tz=i\Leftrightarrow(z\overline{z})Tz=i\Leftrightarrow z\overline{z}\overline{z}=i\Leftrightarrow|z|^2\overline{z}=i$

On pose : $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow(x^2+y^2)(x-iy)=i$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow(x^2+y^2)x-iy(x^2+y^2)=i$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+y^2)x=0\\ y(x^2+y^2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\;ou\;x=0\\ y(x^2+y^2)=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\\ 0=-1\end{cases}ou\begin{cases}x=0\\ y^3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$

$|z|^2\bar{z}=i \Leftrightarrow z=-i$ donc : $S=\{-i\}$

**Exercice23 :**on muni $I=]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$x*y=\sqrt{x^2+y^2} \quad \forall(x;y)\in I^2$

soit $f$ l'application définie sur $I$ vers $I$

tel que : $f(x)=x^2 \quad \forall x\in I$

1) montrer que : $f(x*y)=f(x)+f(y)$

2)a) montrer que $*$ est associative
b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3)soit $a\in I$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois} \quad n\in\mathbb{N}^*$

**Solution :** soit $(x;y)\in I^2$

1) $f(x*y)=(x*y)^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$

$=f(x)+f(y)$ Cqfd

2) $f(x*y)=f(x)+f(y)$

Donc $f$ est un homomorphisme et puisque

$f$ est une bijection donc $f$ est un isomorphismes

De $(I;*)$ dans $(I;+)$ donc : $(I;*)$ et $(I;+)$

Ont la même structures et puisque + est associative dans $I$ alors $*$est aussi associative

Et puisque $(I;+)$ n'admet pas d'élément neutre

alors : $(I;*)$ n'admet pas d'élément neutre

3) $f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)+f(a)+....+f(a)}_{nfois}$

$f(A)=nf(a)=na^2$

Et puisque $f$ est un isomorphismes de $(I;*)$

dans $(I;+)$ donc : $A=f^{-1}(na^2)$

Et puisque : $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ donc / $A=\sqrt{na^2}=\sqrt{n}a$

**Exercice24 :**1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+y-xy$ ; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

tel que : $f(x)=1-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

1) montrer que $f$ est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2)en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) determiner l'ensemble des élements symétrisables pour la loi $*$

4)soit $a\in\mathbb{R}$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois} \quad n\in\mathbb{N}^*$

**Solution :** 1) $f(x)=1-x$

$f(x)=y \Leftrightarrow 1-x=y \Leftrightarrow x=1-y$

Donc : $f^{-1}(x)=1-x=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}=f$

$f(x*y)=1-x*y=1-(x+y-xy)$

$=(1-x)(1-y)=f(x)\times f(y)$

Donc : $f$ est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2) puisque $f$ est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$ alors : $(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};\times)$

Ont la même structure et puisque $\times$ est associative dans $\mathbb{R}$ alors $*$ est aussi associative dans $\mathbb{R}$ et puisque 1 est élément neutre dans $(\mathbb{R};\times)$ alors $f^{-1}(1)=f(1)=0$ est élément neutre dans $(\mathbb{R};*)$

3)on a 0 est élément neutre unique qui n'admet pas de symétrique dans $(\mathbb{R};\times)$ et on a $f(0)=1$

Donc : l'ensemble des élements symétrisables pour $(\mathbb{R};*)$ est $\mathbb{R}-\{1\}$

4) $f(A)=f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)\times f(a)\times....\times f(a)}_{nfois}$

$f(A)=(f(a))^n=(1-a)^n$

Donc : $A=f^{-1}\left((1-a)^n\right)=f\left((1-a)^n\right)=1-(1-a)^n$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »*
*Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*

**Exercices d'applications et de réflexions sur Structures algébriques**

**PROF : ATMANI NAJIB** 2ème BAC Sciences maths

**http://www.xriadiat.com**

# Exercices AVEC SOLUTIONS

# Structures algébriques(partie2)

## Groupe anneau corps

**Exercice 1:** on pose $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall(x;y)\in I^2$

On muni $I$ de la loi de composition définie par :

$x*y=ar\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif

**Solution :**1)soit $(x;y)\in I^2$

$x*y=arc\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)=arc\tan\left(-1+\tan y+\tan x\right)$

Donc $x*y=y*x$ et par suite $*$ est commutatif

2)soit $(x;y;y)\in I^3$

$(x*y)*z=\left(arc\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)\right)*z$

$=arc\tan\left(-1+\tan((arc\tan(-1+\tan x+\tan y))+\tan z)\right)$

$=arc\tan(-1+\left(-1+\tan x+\tan y\right)+\tan z))$

$=arc\tan(-2++\tan x+\tan y+\tan z)$

Et on a :

$x*(y*z)=x*\left(ar\tan\left(-1+\tan y+\tan z\right)\right)$

$=ar\tan\left(-1+\tan x+\tan((arc\tan(-1+\tan y+\tan z)))\right)$

$=arc\tan(-1+\tan x+\left(-1+\tan y+\tan z\right))$

$=arc\tan(-2++\tan x+\tan y+\tan z)$

Donc : $(x*y)*z=x*(y*z)$

par suite $*$ est associative

3) $\forall x\in I$ on a :

$x*\frac{\pi}{4}=arc\tan\left(-1+\tan x+\tan\frac{\pi}{4}\right)=arc\tan\left(-1+\tan x+1\right)$

$x*\frac{\pi}{4}=arc\tan\left(\tan x\right)=x$

Et puisque $*$ est commutatif on a aussi : $\frac{\pi}{4}*x=x$

Et puisque : $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

alors : $*$ possède un élément neutre $e=\frac{\pi}{4}$

4) soit : $x\in I$ on cherche $x'\in I$ tel que :

$x*x'=\frac{\pi}{4}$ ?

$x*x'=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow arc\tan\left(-1+\tan x+\tan x'\right)=\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -1+\tan x+\tan x'=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \tan x+\tan x'=2$

$\Leftrightarrow \tan x'=2-\tan x\Leftrightarrow x'=\arctan\left(2-\tan x\right)\in I$

Donc : tout élément de $I$ possède un symétrique pour $*$ dans $I$ .

Finalement :$(I;*)$ est un groupe commutatif

**Exercice 2:** on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne $\mathrm{T}$ définit par :

$(x;y)\mathrm{T}(x';y')=\left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)$

$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x';y')\in\mathbb{R}^2$

Monter que $\left(\mathbb{R}^2;\mathrm{T}\right)$ groupe non commutative

**Solution :** a) soient $(x;y)$ ; $(x';y')$ et $(x'';y'')$ des éléments de $\mathbb{R}^2$

$$((x;y)\mathrm{T}(x';y'))\mathrm{T}(x'';y'')=(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x})\mathrm{T}(x'';y'')$$

$$=\left(x+x'+x'';\left(ye^{x'}+y'e^{-x}\right)e^{x''}+y''e^{-(x+x')}\right)$$

$$=\left(x+x'+x'';ye^{-(x'+x'')}+y'e^{-x+x''}+y''e^{-(x+x')}\right)$$

$$(x;y)\mathrm{T}((x';y')\mathrm{T}(x'';y''))=(x;y)\mathrm{T}(x'+x'';y'e^{x''}+y''e^{-x'})$$

$$=\left(x+x'+x'';\left(y'e^{x''}+y''e^{-x'}\right)e^{-x}+ye^{x'+x''}\right)$$

$$=\left(x+x'+x'';y'e^{(x''-x)}+y''e^{-(x+x')}+ye^{x'+x''}\right)$$

Donc :

$$((x;y)\mathrm{T}(x';y'))\mathrm{T}(x'';y'')=(x;y)\mathrm{T}((x';y')\mathrm{T}(x'';y''))$$

donc : $\mathrm{T}$ est associative

b) l'élément neutre de $\mathrm{T}$ ?

$(e_1;e_2)$ l'élément neutre de $\mathrm{T}$ ssi $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$(x;y)\mathrm{T}(e_1;e_2)=(x;y)$ et $(e_1;e_2)\mathrm{T}(x;y)=(x;y)$

$$(x;y)\mathrm{T}(e_1;e_2)=(x;y)\Leftrightarrow\left(x+e_1;ye^{e_1}+e_2e^{-x}\right)=(x;y)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+e_1=x\\ ye^{e_1}+e_2e^{-x}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\ e_2e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\ e_2=0\end{cases}$$

Et on a : $(0;0)\mathrm{T}(x;y)=(x;y)$

Donc : $(0;0)$ est l'élément neutre de $\mathrm{T}$

c) le symétrique d'un élément dans $\mathrm{T}$ ?

soient $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ montrons l'existence de $(x';y')\in\mathbb{R}^2$ tel que : $(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(0;0)$ et $(x';y')\mathrm{T}(x;y)=(0;0)$

$$(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(0;0)\Leftrightarrow\left(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x}\right)=(0;0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ ye^{x'}+y'e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ (y+y')e^{-x}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$$

On a aussi : $(-x;-y)\mathrm{T}(x;y)=(0;0)$

Donc : $(-x;-y)$ est le symétrique de élément $(x;y)$ dans $\mathrm{T}$

Donc : $(\mathbb{R}^2;\mathrm{T})$ est un groupe

Et puisque : $(1;1)\mathrm{T}(1;0)=(2;e)$ et $(1;0)\mathrm{T}(1;1)=(2;e^{-1})$

Alors : $(1;1)\mathrm{T}(1;0)\neq(1;0)\mathrm{T}(1;1)$

donc : $\mathrm{T}$ n'est pas commutative

**Exercice 3:** soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et tel que : $(a;b)\in G^2$ $(ab)^2=a^2b^2$ Montrer que que ce groupe est commutatif

**Solution :** par hypothèse on a quels que soient les éléments $(a;b)\in G^2$ : $abab=aabb$

Mais dans un groupe tout élément étant régulier on peut simplifier à gauche par a et à droite par b

Donc : $abab=aabb$

Donc $ba=ab$ et par suite ce groupe est commutatif

$x=b*a'$

**Exercice 4:** (étude d'un groupe fini)

Montrer que $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};+\right)$ et $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}-\{\overline{0}\};\times\right)$ sont deux groupes commutatifs

**Solution :**

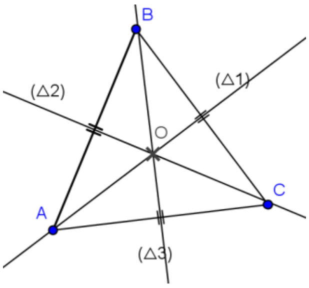
| + | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};+\right)$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

| $\times$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

**Exercice 5:** (étude d'un groupe fini)
(ABC) un triangle équilatéral




$(\Delta_1)$ la médiatrice du segment $[BC]$

$(\Delta_2)$ la médiatrice du segment $[AB]$

$(\Delta_3)$ la médiatrice du segment $[AC]$

Soit $\zeta$ l'ensemble des transformations

suivantes : $\zeta=\{r_1;r_2;r_3;s_1;s_2;s_3\}$

$r_1$ la rotation de centre O et d'angle $0$ : $r_1(O;0)$

$r_2$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ : $r_2\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$

$r_3$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$ : $r_3\left(O;\frac{4\pi}{3}\right)$

$s_1$ la symétrie axial d'axe: $(\Delta_1)$

$s_2$ la symétrie axial d'axe : $(\Delta_2)$

$s_3$ la symétrie axial d'axe : $(\Delta_3)$

Montrer que : $(\zeta;\circ)$ est un groupe

**Solution :** on utilisant la loi de composition des transformation $\circ$ on trouve le tableau suivant :

| $\circ$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_1$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_1$ | $r_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_1$ | $r_3$ | $r_1$ | $r_2$ |
| $s_3$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_1$ |

**Remarque : si** $(G;*)$ est un groupe fini alors chaque élément de $G$ se trouve sur le tableau une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

**Exercice 6:** soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et e l'élément neutre de $G$

1) Montrer que si: $\forall(a;b)\in G^2$ : $(a.b)^2=a^2.b^2$ alors le groupe $G$ est commutatif

2)Montrer que si: $\forall x\in G$ : $x^2=e$ alors le groupe $G$ est commutatif

**Solution : 1)** soit $(a;b)\in G^2$

par hypothèse on a: $(a.b)^2=a^2.b^2$

donc : $a.b.a.b=a.a.b.b$ puisque G un groupe tout élément de G est regulier

Donc : $b.a=a.b$

Par suite ce groupe est commutatif

**2)** soient les éléments $(x;y)\in G^2$

par hypothèse on a: $xyxy=e$

on multipliant à gauche par $x$ et à droite par $y$

Donc : $xxyxyy=xey\Rightarrow x^2yxy^2=xey\Rightarrow eyxe=xy$

$\Rightarrow yx=xy$ Par suite ce groupe est commutatif

**Exercice 7:** (on considére l'ensemble des matrices suivante : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}/a\in\mathbb{R}\right\}$

Monter que $E$ n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

**Solution** : soit $M_a \in E$ et $M_b \in E$

Donc : $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$M_a \times M_b \in E$?

$M_a \times M_b = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & b \\ 2 & 2b \end{pmatrix} \notin E$

donc : $E$ n'est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

donc : $E$ n'est pas un sous-groupe e $(M_2(\mathbb{R});+)$

**Exercice 8:** soit $I$ l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$

**Solution :**on a **:** $I \subset \mathbb{Z}$

$(1) I \neq \varnothing$ car $0 = 2\times 0 \in I$

$(2) \forall (x,y) \in I^2; x - y \in I$ ?

Soient : $x \in I$ et $y \in I$ donc : $x = 2\times p$ et $x = 2\times q$

$x - y = 2\times p - 2\times p = 2\times(p - p) = 2\times k \in I$

Donc : $(I;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$ d'après

La propriété caractéristique d'un sous-groupe

**Exercice 9:** montrer que : $H = \{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\}$

est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$

**Solution :**on a : $H \subset \mathbb{R}^*$ car $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2; 3^m 7^n \in \mathbb{R}^*$

$(1) H \neq \varnothing$ car $3^0 7^0 = 1 \in H$

$(2) \forall (x,y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$ ?

Soient : $x \in H$ et $y \in H$ donc :

$\exists (n,m) \in \mathbb{Z}^2; x = 3^m 7^n$

Et $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2; y = 3^p 7^q$

$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^m 7^n \times 3^{-p} 7^{-q}$

$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times (3^p 7^q)^{-1} = 3^{m-p} 7^{n-q} = 3^e 7^f$

Avec : $(e,f) \in \mathbb{Z}^2$ donc :

$(2) \forall (x,y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$

Donc : $(H;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$

D'après la propriété caractéristique d'un sous-groupe

**Exercice 10:** $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que $(U;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

**Solution :**

1) Un nombre complexe de module 1 est non nul et donc $U \subset \mathbb{C}^*$

Et 1 a pour module 1 et donc 1 ∈ U.

Soit alors $(z_1;z_2) \in U^2$.

$z_1 \times z_2^{-1} \in U$???

$|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2^{-1}| = |z_1| \times |z_2|^{-1} = 1\times 1 = 1\times 1 \in U$

**Exercice 11:** on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{R}^{+*} \right\}$$

Monter que $E$ est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

**Solution** : 1)on a $M_e = \begin{pmatrix} \ln e & 0 \\ 0 & \ln e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Donc : $I_2 \in E$ donc : $E \neq \varnothing$

2) soit $M_a \in E$ et $M_b \in E$ $\quad M_a - M_b \in E$?

$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln b & 0 \\ 0 & \ln b \end{pmatrix}$

$M_a - M_b = \begin{pmatrix} \ln a - \ln b & 0 \\ 0 & \ln a - \ln b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \ln \frac{a}{b} \end{pmatrix} = M_{a/b}$

Et puisque $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et $b\in\mathbb{R}^{+*}$ alors $a/b\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $M_a - M_b = M_{a/b}\in E$

Donc : $E$ est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

**Exercice 12 :** soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et soit $a\in G$

On pose : $C_a=\{x\in G / ax=xa\}$

(centralisateur de $a$)

Et : $Z(G)=\{x\in G / \forall y\in G : xy=yx\}$ (centre de $G$)

Montrer que $C_a$ et $Z(G)$ sont des sous-groupes de : $(G;\cdot)$

**Solution :** 1) Montrons que $C_a$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$ ?

Soit e l'élément neutre du groupe $(G;\cdot)$

a) on a : $ae=ea=a$ donc $e\in C_a$ donc : $C_a\neq\varnothing$

b)soient les éléments $(x;y)\in C_a^{\ 2}$

montrons que : $xy^{-1}\in C_a$ cad montrons que :

$a\left(xy^{-1}\right)=\left(xy^{-1}\right)a$ ??

On a $(x;y)\in C_a^{\ 2}$ donc : $\begin{cases} ax=xa\,(1)\\ ay=ya\,(2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow (ay)^{-1}=(ya)^{-1}\Leftrightarrow y^{-1}a^{-1}=a^{-1}y^{-1}$

$\Rightarrow y^{-1}a^{-1}=a^{-1}y^{-1}$ et $ax=xa\,(1)$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1}=xaa^{-1}y^{-1}\Rightarrow axy^{-1}a^{-1}=xey^{-1}$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1}=xy^{-1}\Rightarrow axy^{-1}a^{-1}a=xy^{-1}a$

$\Rightarrow axy^{-1}e=xy^{-1}a\Rightarrow axy^{-1}=xy^{-1}a$ donc $xy^{-1}\in C_a$

Donc : $C_a$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$

2) Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$ ?

a) on a : $\forall y\in G : ey=ye$ donc $e\in Z(G)$

donc : $Z(G)\neq\varnothing$

b)soient les éléments $(a;b)\in Z(G)^2$

montrons que : $ab^{-1}\in Z(G)$ cad montrons que :

$\left(ab^{-1}\right)y=y\left(ab^{-1}\right)$ $\forall y\in G$ ??

On a $(a;b)\in Z(G)^2$ donc : $\begin{cases} ay=ya\,(1)\\ by=yb\,(2)\end{cases}$

De la même façon que précédemment on trouve

$\left(ab^{-1}\right)y=y\left(ab^{-1}\right)$ $\forall y\in G$ donc $ab^{-1}\in Z(G)$

Donc : $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$

**Exercice 13 :** On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par :

$x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}\,;\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1)soit l'application :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Montrer que $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R};*)$

**Solution** :1) a) $f$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\succ 0$

Donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Par suite $f$ est une fonction bijectif de $\mathbb{R}$

Dans $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

b) soient $x;y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x)*f(y)=f(x)\sqrt{f(y)^2+1}+f(y)\sqrt{f(x)^2+1}$$

Et on a :

$$f(y)^2+1=1+\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)^2=\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}=\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)^2$$

Donc : $\sqrt{f(y)^2+1}=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$ de même on a :

$\sqrt{f(x)^2+1}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ Donc :

$$f(x)*f(y)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)$$

$$f(x)*f(y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

Finalement : $f(x+y)=f(x)*f(y)$

Donc : $f$ est un homorphisme bijectif de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$donc un isomorphisme

2)puisque : $f$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$vers $(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif

Alors : $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

**Exercice 14 :** on considére l'ensemble suivant :

$E=\left\{a+b\sqrt{3}\,/\,(a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2) Monter que $E$ est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) Monter que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

**Solution** : 1) Montrons que$(E;+)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q};+)$ ?

On a $E\subset\mathbb{Q}$ et on a $1=1+0\sqrt{3}$ donc : $1\in E$

donc : $E\neq\varnothing$

soit $x\in E$ et $y\in E$ montrons $x-y\in E$ ?

$x\in E\Leftrightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{Q}^2\,/\,x=a+b\sqrt{3}$

$y\in E\Leftrightarrow\exists(c;d)\in\mathbb{Q}^2\,/\,x=c+d\sqrt{3}$

$x-y=\left(a+b\sqrt{3}\right)-\left(c+d\sqrt{3}\right)=(a-c)+(b-d)\sqrt{3}$

On a $(a;b;c;d)\in\mathbb{Q}^4$ donc : $a-c\in\mathbb{Q}$ et $b-d\in\mathbb{Q}$

Donc : $x-y=a''+b''\sqrt{3}$ par suite : $x-y\in E$

Donc :$(E;+)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q};+)$

donc $(E;+)$ est un un groupe

2) ) Montons que $E$ est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$ ?

soit $x\in E$ et $y\in E$ montrons $x\times y\in E$ ?

$x-y=\left(a+b\sqrt{3}\right)\times\left(c+d\sqrt{3}\right)=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}$

puisque $(a;b;c;d)\in\mathbb{Q}^4$ alors : $ac+3bd\in\mathbb{Q}$ et $ad+bc\in\mathbb{Q}$ donc : $x\times y\in E$

: $E=\left\{a+b\sqrt{3}\,/\,(a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

Donc : $E$ est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) on a $(\mathbb{Q};+;\times)$ est un anneau commutatif

Donc La multiplication est commutative et distributive par rapport à l'addition dans $E$

Par suite $(E;+;\times)$ un anneau commutatif

Et $1=1+0\sqrt{3}$ donc : $1\in E$ et 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $(\mathbb{Q};\times)$

Donc : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $E$

Conclusion : $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

**Exercice 15:** Soit $(A;+;\times)$ un anneau.

Tel que : $x^2 = x \quad \forall x \in A$ ($(A;+;\times)$ s'appelle anneau
De Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2)en déduire que : $x+x=0_A$ ($0_A$ est l'élément neutre de $(A;+)$)

3)soient : $x \in A$ et $y \in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de $x$ et $y$

b) en déduire que $(A;+;\times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4)on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) montrer que : a) $x+y \neq 0_A$ b) $x+y \neq y$

5)déterminer le tableau de la somme pour les éléments : $0_A$ ; $x$ ; $y$ ; $x+y$

**Solution** : 1)soit $x \in A$ on a :

$$(x+x)^2 = (x+x)(x+x) = xx+xx+xx+xx$$

$$(x+x)^2 = x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x+x+x \text{ car } x^2 = x$$

Donc : $(x+x)^2 = x+x+x+x$

2)a)soient : $x \in A$ et $y \in A$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx+xy+yx+yy$$

$$(x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2$$

$$(x+y)^2 = x+xy+yx+y \text{ car } x^2 = x \ \forall x \in A$$

b)on a : $(x+y)^2 = x+xy+yx+y$ et $(x+y)^2 = x+y$

donc : $x+xy+yx+y = x+y$

donc : $xy+yx=0_A$ et puisque $xy+xy=0_A$

Alors : $xy+yx = xy+xy$ donc $yx = xy$

Donc : $(A;+;\times)$ est commutatif

c) déduction de : $xy(x+y)$

soient : $x \in A$ et $y \in A$

$$xy(x+y) = xyx+xy^2 = xxy+xy^2 = x^2y+xy^2 = xy+xy$$

et puisque $xy+xy=0_A$ alors : $xy(x+y)=0_A$

4) on suppose que : $x \neq 0_A$ et $y \neq 0_A$ et $y \neq x$

a) on suppose que $x+y=0_A$ et puisque $x+x=0_A$

Alors : $x+y=x+x$ cad $y=x$ contradiction

Donc : $x+y \neq 0_A$

b) on suppose que $x+y=y$ donc : $x=0_A$

Contradiction donc $x+y \neq y$

5) on a : $x+x=0_A$ et $x+0_A=0_A+x=x$

| $+$ | $0_A$ | $x$ | $y$ | $x+y$ |
|---|---|---|---|---|
| $0_A$ | $0_A$ | $x$ | $y$ | $x+y$ |
| $x$ | $x$ | $0_A$ | $x+y$ | $y$ |
| $y$ | $y$ | $x+y$ | $0_A$ | $x$ |
| $x+y$ | $x+y$ | $y$ | $x$ | $0_A$ |

**Exercice 16:** soit (K, +, ×) un corps finit :

$K = \{0; e; x_1; x_2; ...; x_m\}$ ; $m \in \mathbb{N}^*$

Avec : 0 (resp. $e$) l'élément neutre
pour +(resp. ×).

1)montrer que : $-e$ et $e$ sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×

2)montrer que le produit de tous les éléments de K est égal a $-e$

3)on considérant le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+;\times)$ avec n premier montrer que : $\overline{(n-1)!+1} \equiv 0[n]$

**Solution :1)**

$$\forall x \in K-\{0\} \quad x = x^{-1} \Leftrightarrow x \times x = x^{-1} \times x \Leftrightarrow x^2 = e$$

$\Leftrightarrow x^2-e=0 \Leftrightarrow x^2-e^2=0 \Leftrightarrow (x-e)(x+e)=0$

$\Leftrightarrow x=-e$ ou $x=e$ car (K, +, ×) un corps

2)puisque : $-e$ et $e$ sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×

Alors : $K-\{0\}=\{-e;e;a_1;a_1^{-1};a_2;a_2^{-1}...;a_p;a_p^{-1}\}$

Donc : $-e\times e\times a_1\times a_1^{-1}\times a_2\times a_2^{-1}...\times a_p\times a_p^{-1}=$

$=-e\times e\times e\times e...\times e=-e$

3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};.....;\overline{n-1}\}$ (un corps)

D'après les questions précédentes on a :

$\overline{1}\times\overline{2}\times.....\times\overline{n-1}=-\overline{1}$ donc :

$\overline{1\times2\times3\times.....\times(n-1)}=-\overline{1}$

donc : $\overline{(n-1)!+1}\equiv 0[n]$

$xa=ya\Rightarrow x=y$

**Exercice17:** on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2)Monter que $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soit $f$ l'application qui associe à chaque matrice $M_{(a;b)}$ de $E-\{0_2\}$ le nombre complexe : $a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbb{C}^*$

a) Monter que $f$ est un morphisme bijectif de ($E-\{0_2\}$, ×) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)en déduire la structure de ($E-\{0_2\}$, ×)

4) Monter que $(E;+;\times)$ est un corps

**Solution** : 1)on a : $M_{(0;0)}=0_2\in E$ donc : $E\neq\varnothing$

Et on a $E\subset(M_2(\mathbb{R});\times)$

soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(c;d)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}$

$$M_{(a;b)}-M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & -2(b-d) \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

Donc : $M_{(a;b)}-M_{(c;d)}=M_{(a-c;b-d)}$

Et puisque : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ alors : $a-c\in\mathbb{R}$ et $b-d\in\mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)}-M_{(c;d)}\in E$

Donc :$(E;+)$ est un un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

donc $(E;+)$ est un groupe commutatif

**2)** $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix}=$

$$M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix} ac-2bd & -2(ad+bc) \\ ad+bc & ac-2bd \end{pmatrix}=M_{(ac-2bd;ad+bc)}$$

Et puisque : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd\in\mathbb{R}$ et $ad+bc\in\mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\in E$

$E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soient : $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(c;d)}\in E$

$f\left(M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\right)=f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$=ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}$

$f\left(M_{(a;b)}\right)\times f\left(M_{(c;d)}\right)=\left(a+ib\sqrt{2}\right)\left(c+id\sqrt{2}\right)$

$=ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}=f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$=f\left(M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\right)$

$f$ est un morphisme de ($E-\{0_2\}$, ×) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $x+iy\in\mathbb{C}^*$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)}\in E$ tel que : $f\left(M_{(a;b)}\right)=x+iy$

$f\left(M_{(a;b)}\right)=x+iy \Leftrightarrow a+ib\sqrt{2}=x+iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=x \\ b\sqrt{2}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x \\ b=\dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ Existe et il est unique

donc : $f$ est un morphisme bijectif de $(E-\{0_2\},\ \times)$ dans $\left(\mathbb{C}^*;\times\right)$

b)$(E-\{0_2\},\ \times)$ et $\left(\mathbb{C}^*;\times\right)$ sont isomorphes

et $\left(\mathbb{C}^*;\times\right)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a $(E-\{0_2\},\ \times)$ un groupe commutatif

4)La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et $E$ est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R});\times\right)$donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $E$

Donc on a :$(E;+)$ est un groupe commutatif et $(E-\{0_2\},\ \times)$ un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $E$

Conclusion : $(E;+;\times)$est un corps

**Exercice 18:** Soit $(K;+;\times)$un corps.

On note :$0_K$ l'élément neutre de $(K;+)$ et $1_K$ l'élément neutre de $(K;\times)$et on suppose qu'il existe un homomorphisme $f$ bijectif de$(K;+)$ vers $\left(K-\{0_K\};\times\right)$

1)on suppose que $1_K+1_K=0_K$¨

montrer que : $f(K)=\{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K+1_K\neq 0_K$ et on pose :

$\alpha=f^{-1}(1_K)$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)$

a) montrer que : $\alpha+\alpha=\beta+\beta$

b) en déduire que $\alpha=\beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas d'homomorphisme $f$ bijectif de $(K;+)$ vers $\left(K-\{0_K\};\times\right)$

**Solution** : 1) )on suppose que $1_K+1_K=0_K$¨

soit $x\in K$ on a donc: $x\times(1_K+1_K)=x\times 0_K$

donc: $x\times 1_K+x\times 1_K=x\times 0_K$

donc: $x+x=0_K$ donc: $f(x+x)=f(0_K)$

puisque $f$ homomorphisme bijectif de$(K;+)$ vers $\left(K-\{0_K\};\times\right)$on a donc : $f(x)\times f(x)=1_K$

donc: $\left(f(x)\right)^2=1_K$ donc: $\left(f(x)-1_K\right)\left(f(x)+1_K\right)=0_K$

donc : $f(x)=1_K$ ou $f(x)=-1_K=1_K$ car $1_K+1_K=0_K$

donc : $\forall x\in K$ $f(x)=1_K$ donc : $f(K)=\{1_K\}$

2)a)on a : $1_K+1_K\neq 0_K$ et$\alpha=f^{-1}(1_K)$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)$

$\alpha=f^{-1}(1_K)\Leftrightarrow f(\alpha)=1_K$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)\Leftrightarrow f(\beta)=-1_K$

donc : $f(\alpha+\alpha)=\left(f(\alpha)\right)^2=(1_K)^2=1_K$

et $f(\beta+\beta)=\left(f(\beta)\right)^2=(-1_K)^2=1_K$

donc : $f(\alpha+\alpha)=f(\beta+\beta)$

donc : $\alpha+\alpha=\beta+\beta$ car $f$ bijectif

b)on a : $\alpha+\alpha=\beta+\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta)\times(1_K+1_K)=0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta=0_K$ ou$1_K+1_K=0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=0_K$ car $1_K+1_K\neq 0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

3) s'il existe un homomorphisme $f$ bijectif de

$(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$ on alors deux cas :

1cas : $1_K+1_K=0_K$ d'après 1) on a :

$\forall x\in K \quad f(x)=1_K \Leftrightarrow \forall x\in K; f(x)=f(0_K)$

Puisque $f$ bijectif : $\forall x\in K \quad x=0_K$

Cad $K=\{0_K\}$ et donc : $K-\{0_K\}=\varnothing$

contradiction

2cas : $1_K+1_K\neq 0_K$ d'après 2) et on posons :

$\alpha=f^{-1}(1_K)$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)$ on trouve : $\alpha=\beta$

Cad $f^{-1}(-1_K)=f^{-1}(1_K)$ et Puisque $f^{-1}$ bijectif

Alors : $-1_K=1_K$ cad $1_K+1_K=0_K$ contradiction

Avec le fait que $1_K+1_K\neq 0_K$

Donc : qu'il n'existe pas d'homomorphisme $f$

bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

**Exercice19:**

1) On munit de la loi de composition interne

définie par : $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$ ; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2)On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de $*$ composition interne

définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de n'a de symétrique pour $*$

.3)On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$

définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application : $x\to x^3$ est un

isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ vers $(\mathbb{R};+)$ En déduire que

$(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

**Solution** :1) $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$)

$=yx+(y^2-1)(x^2-1)$

La loi est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver $x;y;z\in\mathbb{R}$ et tels que :

$x*(y*z)\neq(x*y)*z$

1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans $x;y;z$ et.

Prenons, par exemple : $x=0;y=2;z=3$

$x*(y*z)=0*(2*3)=0*(2\times 3+(2^2-1)(3^2-1))$

$=0*30=0\times 30+(0^2-1)(30^2-1)=-899$

$(x*y)*z=(0*2)*3=0*2+(0^2-1)(2^2-1)*3$

$=-3*3=0*2+((-3)^2-1)(3^2-1)=-9+8^2=55$

La loi n'est pas associative

$1*x=1x+(1^2-1)(x^2-1)=x$

De plus, comme la loi est commutative

$x*1=1*x$

On a bien $x*1=1*x=x$, 1 est l'élément neutre.

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}=y*x$

La loi est commutative.

$(x*y)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}$

$(x*y)*z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant en $(x;y:z)$ en $(y;z;x)$ $(y*z)*x=\sqrt{y^2+z^2+x^2}$

Comme $*$ est commutative :

$(y*z)*x=x*(y*z)$ Et finalement :

$(x*y)*z=x*(y*z)$

La loi est associative.
Remarque : On aurait pu calculer directement

$x*(y*z)$

$0*x=\sqrt{0^2+x^2}=|x|$ car $x\geq 0$

Comme $*$ est commutative : $0*x=x*0=x$

0 est l'élément neutre.

Supposons $x$ qu'admette un symétrique $y$

$x*y=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=|x|\Leftrightarrow x^2+y^2=0\Leftrightarrow x+y=0$

Or $x\succ 0$ et $y\succ 0$ donc : $x*y=0$ est impossible,

pour tout $x\succ 0$ $x$ n'a pas de symétrique.

3) On pose $\rho(x)=x^3$ ET $\rho'(x)\succ 0$ pour tout

$x\neq 0$ et est nul en 0 , $\rho$ est une fonction

strictement croissante $\mathbb{R}$ de sur $\mathbb{R}$ , $\rho$ est une

bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ . Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$\rho(x*y)=(x*y)^3=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3=x^3+y^3=\rho(x)+\rho(y)$

$\rho$ est un morphisme de( $\mathbb{R}$ ; $*$ ) dans ( $\mathbb{R}$ ;+)et

donc un isomorphisme de( $\mathbb{R}$ ; $*$ ) dans ( $\mathbb{R}$ ;+)

(puisque $\rho$ est bijective).

$\rho^{-1}$ est un isomorphisme de( $\mathbb{R}$ ;+) dans( $\mathbb{R}$ ; $*$ )

donc un morphisme, ( $\mathbb{R}$ ;+) est un groupe commutatif
et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe.
( $\mathbb{R}$ ; $*$ )est un groupe.

**Exercice20:** on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$G=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}/\, a^2+b^2=1 et\,(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que : $G\neq\varnothing$

2)Monter que : $G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}/\,\theta\in\mathbb{R}\right\}$

3)Monter que $G$ est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R});\times\right)$

4) est ce que $G$ est une partie stable de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$ ?

5)on pose : $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

calculer $M^n(\theta)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ou : $M^n(\theta)=\underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times\ldots\times M(\theta)}_{nfois}$

6) soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $G$ tel que :

$f(\theta)=M(\theta)$

a) Monter que $f$ est un morphisme surjectif de

$(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

b)en déduire la structure de $(G;\times)$

7) soit l'ensemble : $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

a) Monter que : $U=\{e^{i\theta}/\theta\in\mathbb{R}\}$

b)Monter que $(U;\times)$ est un groupe commutatif

**Solution** : 1)on a : $M_{(1;0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ et $0^2+1^2=1$

donc : $G\neq\varnothing$

2)

$M\in G\Leftrightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2/M=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} eta^2+b^2=1$

$\exists\theta\in\mathbb{R}/a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$

Donc : $M\in G\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R}/M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} / \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

3)soit: $M_1=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$

Deux éléments de $G$

$$M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

Donc : $M_1\times M_2\in G$

Donc $G$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

4)on a ; $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ et $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$

Deux éléments de $G$

Et puisque : $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin G$

Car $0^2+0^2=0\neq 1$

Donc $G$ n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});+)$

5)on pose : $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

Calculons : $M^n(\theta)$

$$M^2(\theta)=M(\theta)\times M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}=M(n\theta)$$

par récurrence sur $\mathbb{N}^*$

a)on a : $M^1(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=M(1\theta)$

la ppté est vraie pour n=1

b)on suppose que :

$$M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}=M(n\theta)$$

c) montrons que :

$$M^{n+1}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta\\ \sin(n+1)n\theta & \cos(n+1)\theta\end{pmatrix}=M((n+1)\theta)\ ?$$

$$M^{n+1}(\theta)=M(\theta)M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(n\theta+\theta) & -\sin(n\theta+\theta)\\ \sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta)\end{pmatrix}=M((n+1)\theta)$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ M^n(\theta)=M(n\theta)$

6)a)Soit $(\theta_1;\theta_2)\in\mathbb{R}^2$

On a : $f(\theta_1+\theta_2)=M(\theta_1+\theta_2)=M(\theta_1)\times M(\theta_2)$

donc : $f(\theta_1+\theta_2)=f(\theta_1)\times f(\theta_2)$

donc : $f$ est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

et on a : $\forall M\in G\ \ \exists\theta\in\mathbb{R}\ /\ f(\theta)=M(\theta)$

donc $f$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

6)b)puisque $f$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$ on a $f(G)=\mathbb{R}$ et on a aussi $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif alors aussi $(G;\times)$ est un groupe commutatif

7) a)Montrons que : $U=\{e^{i\theta}\ /\ \theta\in\mathbb{R}\}$ ?

Soit $z\in\mathbb{C}$ alors $z=a+ib$ avec $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

$$z\in U\Leftrightarrow |z|=1\Leftrightarrow |a+ib|=1$$

$$z\in U\Leftrightarrow a^2+b^2=1$$

$$\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R}/a=\cos\theta \text{ et } b=\sin\theta \text{ et } z=a+ib$$

$z \in U \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$

Donc : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$

b)Montrons que $(U;\times)$est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

on a $U \subset \mathbb{C}^*$ et $U \neq \varnothing$ car $1 \in U$

Soient $z_1 \in U$ et $z_2 \in U$ montrons que $z_1 \times z^{-1}{}_2 \in U$ ?

$z_1 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : z_1 = e^{\theta_1 i}$

$z_2 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : z_2 = e^{\theta_2 i}$

On a : $z_1 \times z^{-1}{}_2 = e^{\theta_1 i} \times \left(e^{\theta_2 i}\right)^{-1} = e^{\theta_1 i} \times e^{-\theta_2 i} = e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$

Avec $\theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{R}$ donc : $z_1 \times z^{-1}{}_2 \in U$

Donc : $(U;\times)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

Et puisque $(\mathbb{C}^*;\times)$ est commutatif

Alors : $(U;\times)$ est un groupe commutatif

**2)** $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac-2bd & -2(ad+bc) \\ ad+bc & ac-2bd \end{pmatrix} = M_{(ac-2bd;ad+bc)}$$

Et puisque : $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd \in \mathbb{R}$et $ad+bc \in \mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$

$E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$f\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right) = f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$= ac - 2bd + i(ad+bc)\sqrt{2}$

$f\left(M_{(a;b)}\right) \times f\left(M_{(c;d)}\right) = \left(a + ib\sqrt{2}\right)\left(c + id\sqrt{2}\right)$

$= ac - 2bd + i(ad+bc)\sqrt{2} = f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$= f\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right)$

$f$ est un morphisme de ($E - \{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $x+iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f\left(M_{(a;b)}\right) = x+iy$

$f\left(M_{(a;b)}\right) = x+iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x+iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ Existe et il est unique

donc : $f$ est un morphisme bijectif de ($E - \{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)($E - \{0_2\}$, $\times$) et $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*;\times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a ($E - \{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

4)La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et $E$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $E$

Donc on a :

$(E;+)$ est un groupe commutatif et

($E - \{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $E$

Conclusion : $(E;+;\times)$est un corps

**Exercice 21:** Soit $(A;+;\times)$un anneau.

Et $1_A$ est l'élément neutre de $(A;\times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

a) $ab+ba=1_A$

b) $a^2b+ba^2=a$

1)montrer que : $a^2b=ba^2$

2)montrer que : $aba+aba=a$

3)en déduire que : $ab=ba$

**Solution** : 1)on a : $a^2b+ba^2=a$

donc : $a^2b+ba^2=a1_A$

donc : $a^2b+ba^2=a\left(ab+ba\right)$

donc : $a^2b+ba^2=a^2b+aba$

donc : $ba^2=aba\,(1)$

et on a : $a^2b+ba^2=a=1_A a$

donc : $a^2b+ba^2=\left(ab+ba\right)a$

donc : $a^2b+ba^2=aba+ba^2$

donc : $a^2b=aba\,(2)$

de $(1)$ et $(2)$ en déduit que : $a^2b=ba^2$

2)d'après ce qui précéde on a :

$ba^2=aba$ et $a^2b=aba$

Donc : $aba+aba=a^2b+ba^2$ et d'après b) on a

$aba+aba=a$

3) on a : $(ab)(ab)=abab=(aba)b=(ba^2)b$

$(ba)(ba)=baba=b(aba)=b(a^2b)$

(Car : $aba=a^2b$)

Et on a : $(ab)(ab)=(1_A-ba)(1_A-ba)$

$(ab)(ab)=1_A-ba-ba+(ba)(ba)$

Donc : $ba^2b=1_A-ba-ba+ba^2b$

Car : $(ab)(ab)=(ba)(ba)=ba^2b$

Donc : $ba+ba=1_A$ et puisque : $ba+ab=1_A$

Alors : $ab=ba$

**Exercice22:** Soit $(K;+;\times)$ un corps.

On note : $1_K$ l'élément neutre de $(K;\times)$

Soient $x$ et $y$ deux éléments de $K-\{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x+y=1_K$ b) $x^{-1}+y^{-1}=1_K$

avec : $x^{-1}$ le symétrique de $x$ pour la loi $\times$

1)montrer que : $xy=yx=-1_K$

2)montrer que : $x^4+y^4=7.1_K$

Avec : $7.1_K=\underbrace{1_K+1_K+\ldots+1_K}_{7\ fois}$

**Solution** : 1) Soient $x$ et $y$ deux éléments de

$K-\{0_K\}$ on a : $xy=x\left(x^{-1}+y^{-1}\right)y$

$xy=xx^{-1}y+xy^{-1}y=y+x=-1_K$

Donc : $xy=yx=-1_K$

2)on a : $1_K=\left(x+y\right)^2=x^2+xy+yx+y^2$

$1_K=x^2-1_K-1_K+y^2$

Donc : $x^2+y^2=3.1_K$

Donc : $9.1_K=\left(x^2+y^2\right)^2$

Donc : $9.1_K=x^4+x^2y^2+y^2x^2+y^4$

Donc : $9.1_K=x^4+1_K+1_K+y^4$

Donc : $x^4+y^4=7.1_K$

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »*
*Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*