TD : d'ARITHMETIQUE : Exercices de rappels avec corrections

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156
12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution :1) 156 a 12 diviseurs :
1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.
156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) D_{-8} = {−8, −4, −2, −1, 1,2,4,8}

Exercice2 : 1) $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$

1) c) $\begin{cases} a/x-y \\ a/b-c \end{cases} \Rightarrow a/bx-by \text{ et } a/by-cy \Rightarrow a/bx-cy$

2) $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

$\Rightarrow a/12n+1 \text{ et } a/-12n+18 \Rightarrow a/19$

$\Rightarrow a\in\{\pm1;\pm19\}$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

$\Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } a/(2n-1)^2 \Rightarrow d/4n^2+12 \text{ et } d/4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d/11+4n \text{ et } d/-2+4n \Rightarrow d/13$

Exercice3 : $a\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

Solution : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/2(5x-7)-5(2x+3)$

$a/10x-14-10x-15 \Rightarrow a/-29 \Rightarrow a/29$

Exercice4 : Soient $a_n = 2n + 1$ et $b_n = 5n + 4$
1- Montrer que tout diviseur commun de a_n et b_n divise 3.
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a_n et b_n

Exercice5 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$:
3 divise 4^n-1 **Solution :**

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad \exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0-1=0$ est un multiple de 3
Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$ donc $4^n=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :
$\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}-1=3k'$??

$4^{n+1}-1=4\times4^n-1$
$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

avec $k'=4k+1$ Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :
$\forall n\in\mathbb{N}; 4^n-1$ est divisible par 9

Exercice6 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

Solution : $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que $n+2\in\{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que $n\in\{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n\in\{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.
Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

Exercice7 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$
Représente un entier relatif ?

Solution : Cette fraction a un sens si : $n+4\neq 0$ soit $n\neq -4$ On constate que $3n+8=3(n+4)-4$
$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.
Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.
Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$
On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.
Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$
b) $2xy+2x+y=99$

Solution :a) $x^2-y^2=32\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=32$
$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32
Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair
Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$
On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99\Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$
$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1\Leftrightarrow(2x+1)(y+1)=100$
Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100 : $D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

Exercice9 :déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p\in\mathbb{N})$

Solution: $n\in\mathbb{N}$: $n=25p+p^2$ et $0\leq p^2\prec 25$ donc $0\leq p\prec 5$

Donc : $\begin{cases}p=0\\n=0\end{cases}ou\begin{cases}p=1\\n=26\end{cases}ou\begin{cases}p=2\\n=54\end{cases}ou\begin{cases}p=3\\n=84\end{cases}ou\begin{cases}p=4\\n=116\end{cases}$

Donc : $n\in\{0;26;54;84;116\}$

Exercice 10: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution: soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :
$n=aq+r$ et $0\leq r\leq a-1$ et on a : $q=bq'+r'$ et $0\leq r'\leq b-1$ donc on déduit que :
$n=a(bq'+r')+r=abq'+ar'+r$
Et puisque : $0\leq r'\leq b-1$ et $0\leq r\leq a-1$ alors : $ar'+r\leq ab-1$ donc $n=abq'+ar'+r$
$0\leq ar'+r\leq b-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

Exercice11: $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{Z}$
si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :
$a-1=bq+r$ et $0\leq r\prec b$
Donc : $ab^9-b^9=b^{10}q+rb^9$
Donc : $ab^9-1=b^{10}q+rb^9+b^9-1$
Donc : $ab^9-1=b^{10}q+(r+1)b^9-1$
On montre que : $0\leq(r+1)b^9-1\prec b^{10}$???
On a : $0\leq r\prec b$ donc $0\leq r+1\leq b$
donc $0\leq(r+1)b^9\leq b^{10}$ donc $0\leq(r+1)b^9-1\leq b^{10}-1$
donc $0\leq(r+1)b^9-1\prec b^{10}$
conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de ab^9-1 par b^{10}
b) L'inverse est-il vrai ?

Exercice12: 1) Les nombres suivants sont–ils premiers :499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2+3n$ $n\in\mathbb{N}$

Exercice 13 :

Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 ne peut pas être égale à 2.

Exercice 14 :
a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme $p = 6n + 1$ ou $p = 6n + 5$

Exercice15 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution : on pose $\quad d = a \wedge (a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d = 1$

Exercice16 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n+2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution :1)on pose $d = A \wedge B$ et $d' = (n+2) \wedge 7$

On a : $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2+3 = (n+2)(n-2)+7$

$n^2+3-(n+2)(n-2) = 7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2 \Rightarrow d/(n+2)\wedge 7 \Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A \wedge B$ donc d'/d

donc d/d' et d'/d et $d \in \mathbb{N}$ et $d' \in \mathbb{N}$ donc

donc $d = d'$ donc : $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A \wedge B$ Donc : $n+2/(n+2)\wedge 7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1;7\}$ ce qui entraine que $n = 5$

Exercice 17:
1- Montrer que tout diviseur commun de : $a = 2n + 3$ et $b = 5n + 1$ est un diviseur de 13
2- Déterminer tous les diviseurs communs de a et b.
3- Déterminer les valeurs de n pour lesquels : $a \wedge b = 13$

Exercice 18: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution :1)on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b \wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a \wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2)on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice19 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$ montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution :1)on pose $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/35a+57$ et $d/45a+76$

$\Rightarrow d/9(35a+57)$ et $d/7(45a+76)$

$\Rightarrow d/315a+513$ et $d/315a+532$

$\Rightarrow d/19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraine que :

$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Exercice 20:
1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution:1)**(1)** $67 = 1 \times 39 + \boxed{28}$ **(2)** $39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$

(3) $28 = 2 \times 11 + \boxed{6}$ **(4)** $11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$

(5) $6 = 1 \times 5 + \boxed{1}$ **(6)** $5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6=1\times5+\boxed{1} \Rightarrow 6-1\times5=\boxed{1}$

$\Rightarrow 6-1\times(11-1\times6)=\boxed{1} \Rightarrow 2\times6-1\times11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times(28-2\times11)-1\times11=\boxed{1} \Rightarrow 2\times28-5\times11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times28-5\times(39-1\times28)=\boxed{1} \Rightarrow 7\times28-5\times39=\boxed{1}$

$\Rightarrow 7\times(67-1\times39)-5\times39=\boxed{1} \Rightarrow \boxed{7\times67-12\times39=\boxed{1}}$

Exercice21 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a :
1) $n\wedge(n+1)=1$ 2) $n\wedge(2n+1)=1$
3) $(2n+1)\wedge(3n+1)=1$

Exercice22: $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19
Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :
1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution : 1)On a : $a\equiv17[19]$ et $b\equiv15[19]$

donc : $a+b\equiv17+15[19]\Leftrightarrow a+b\equiv13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a\equiv17[19]\Rightarrow a^2\equiv17^2[19]\Rightarrow a^2\equiv4[19]$

$b\equiv15[19]\Rightarrow b^2\equiv15^2[19]\Rightarrow b^2\equiv16[19]$

Donc : $a^2+b^2\equiv4+16[19]\Leftrightarrow a^2+b^2\equiv1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a\equiv17[19]\Rightarrow 2a\equiv2\times17[19]\Rightarrow 2a\equiv15[19]$(1)

$b\equiv15[19]\Rightarrow 5b\equiv5\times15[19]\Rightarrow 5b\equiv18[19]$

Donc : $5b\equiv-1[19]\Rightarrow -5b\equiv1[19]$(2)

De **(1)** et (2) on déduit que :
$2a-5b\equiv15+1[19]\Rightarrow 2a-5b\equiv16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice23 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n
2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}
3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n+5n+2\equiv0[10]$

Solution :1) $3^n\equiv r[10]$ et $r\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a : $3^0\equiv1[10]$ et $3^1\equiv3[10]$ et $3^2\equiv9[10]$

et $3^3\equiv7[10]$ et $3^4\equiv1[10]$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

On a : $3^4\equiv1[10]$ donc : $(3^4)^k\equiv1^k[10]$

donc : $3^{4k}\equiv1[10]$ et $3^{4k+1}\equiv3[10]$ et $3^{4k+2}\equiv9[7]$
et $3^{4k+3}\equiv7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10
cad : on cherche r tel que : $2019^{2020}\equiv r[10]$??

On a : $2019=2010+9$ donc : $2019\equiv9[10]$

donc : $2019^{2020}\equiv9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv3^{4040}[10]$

or : $4040=4\times1010=4\times k$

donc : $2019^{2020}\equiv3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode **:** $2019\equiv9[10]$

donc : $2019\equiv-1[10]$ donc : $2019^{2020}\equiv1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv1[10]$	$\equiv3[10]$	$\equiv9[10]$	$\equiv7[10]$
$5n$	$\equiv0[10]$	$\equiv5[10]$	$\equiv0[10]$	$\equiv5[10]$
3^n+5n+2	$\equiv3[10]$	$\equiv0[10]$	$\equiv1[10]$	$\equiv4[10]$

donc : $3^n+5n+2\equiv0[10]\Leftrightarrow n=3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

Exercice24 : 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$
$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv3[10]$

Solution :1)on a : $(n+2)^{n+2}=\sum_{k=0}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$$(n+2)^{n+2}=C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2}+C_{n+2}^1 n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2}=2^{n+2}+(n+2)n2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

Donc : $(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+n^2+2n)+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$$(n+2)^{n+2}=2^{n+1}(2+2n)+2^{n+1}n^2+n^2\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(1+n)=n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)$$

on a : $n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)\equiv0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv0[n^2]$

2) on a : $7\equiv7[10]$ et $7^2\equiv-1[10]$ donc $7^4\equiv1[10]$

Donc : $7^{4k}\equiv1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv9[10]$
$7^{4k+3}\equiv3[10]$

On aussi : $7\equiv3[4]$ et $7^2\equiv1[4]$

Donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} \equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}} \equiv 3[10]$

Exercice 25 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13
3) Montrer que pour tout n entier naturel :
$3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7
4) Montrer que pour tout n entier naturel,
$5n^3+n$ est divisible par 6
5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : n^6-1 est un multiple de 7
6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 6

Exercice26 : $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$
1)montrer que $x \wedge y = a \wedge b$
2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$
a)montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$
b)en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$
c)montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
d)en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution :1)on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
$d = x \wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b
Car il divise toute combinaison de x et y
$\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$
Inversement :
$d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$
$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$
$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$
ce qui entraine: $d = d'$
2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$
a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?
la division euclidienne de $n^2+5n+13$ par $n+3$
donne : $n^2+5n+13=(n+3)(n+2)+7$
Donc : $a=b(n+2)+7 \Leftrightarrow a-b(n+2)=7$
on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$

$d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a-b(n+2)$ et d/b
$\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$
$d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et d'/b
$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$
ce qui entraine: $d = d'$
b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??
on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$
donc : $d/7$ donc : $d=1$ ou $d=7$
c)montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
$n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n+3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n+3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$
d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??
$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4
$n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$ ou $n \equiv 6[7]$

Exercice27: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x=\bar{3}$ 2) $x^2+\bar{3}x=\bar{0}$
3) $\overline{2013}x^3+\bar{2}x=\bar{k}$

Solution : On a : $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3}\}$
1)On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que Cette équation n'admet pas de solutions
Donc : $S=\varnothing$
1)On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2+\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :
$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation
Donc : $S=\{\bar{0};\bar{1}\}$
2) $\overline{2013}x^3+\bar{2}x=\bar{k} \Leftrightarrow \bar{1}x^3+\bar{2}x=\bar{k} \Leftrightarrow x^3+\bar{2}x=\bar{k}$
Car : $2013=503\times4+1$
On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$x^3+\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Si $\bar{k}=\bar{0}$: $S=\{\bar{0};\bar{2}\}$ Si $\bar{k}=\bar{1}$: $S=\{\bar{3}\}$

Si $\overline{k}=\overline{2}\ :\ S=\varnothing$ Si $\overline{k}=\overline{3}\ :\ S=\left\{\overline{1}\right\}$

Exercice28 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\overline{3}y=\overline{1}$

Solution :on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\right\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$S=\left\{\left(\overline{0};\overline{2}\right);\left(\overline{1};\overline{0}\right);\left(\overline{2};\overline{3}\right);\left(\overline{3};\overline{1}\right);\left(\overline{4};\overline{3}\right);\left(\overline{4};\overline{4}\right)\right\}$

Exercice29 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$

Solution :

$\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overline{3}+\overline{2}\right)x+\left(\overline{2}+\overline{4}\right)y=\overline{3}+\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$

$\begin{cases}y=\overline{4}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\overline{1}\\ y=\overline{4}\end{cases}$ donc $S=\left\{\left(\overline{1};\overline{4}\right)\right\}$

Exercice30 : déterminer **:** $d=\left(-8316\right)\wedge 1080$ et $m=8316\vee 1080$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316=2^2\times 3^3\times 7\times 11$ et $1080=2^3\times 3^3\times 5$

$d=8316\wedge 1080=2^2\times 3^3=108$ et

$m=8316\vee 1080=2^3\times 3^3\times 5\times 7\times 11=11880$

Exercice31: si $2=a\wedge b$ et $-12=a\times b$ déterminer **:** $a\vee b$

Solution : on a $a\wedge b)\times(a\vee b)=|ab|$

donc : $a\vee b=|a\times b|/a\wedge b=|-12|/2=6$

Exercice32: $a=\left(25^n-1\right)\left(36^n-1\right)$ et $b=\left(5^n-1\right)\left(6^n-1\right)$

Calculer les $a\vee b$ $\left(n\in\mathbb{N}\right)$

Solution :

$a=\left(\left(5^n\right)^2-1\right)\left(\left(6^n\right)^2-1\right)=\left(5^n-1\right)\left(5^n+1\right)\left(6^n-1\right)\left(6^n+1\right)$

$a=b\left(5^n+1\right)\left(6^n+1\right)$ donc : b/a donc : $a\vee b=a$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Exercices d'applications et de réflexions *sur L'ARITHMETIQUE*
Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

http://www.xriadiat.com

L'ARITHMETIQUE

Exercice1 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$;
1) $(3n+1)\wedge(7n+2)=1$, 2)$5n + 3) \wedge (2n + 1) = 1$
3)$n + 2) \wedge (n^2 + 2n - 1) = 1$
Solution : 1)
on a : $7(3n+1)-3(7n+2)=1$
Donc : $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que
$u(3n+1)+v(7n+2)=1$ $u=7$ et $v=-3$
Donc d'après le théorème de Bézout on a :
$(3n+1)\wedge(7n+2)=1$
2) $(5n + 3) \wedge (2n + 1) = 1$
Car : $2 \times (5n + 3) + (-5) \times (2n + 1) = 1$
3) $(n + 2) \wedge (n^2 + 2n - 1) = 1$
Car $n \times (n + 2) + (-1) \times (n^2 + 2n - 1) = 1$

Exercice2 : Montrons que : $360 \wedge 84 = 12$ et déterminer u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :
$360u + 84v = 12$
Solution : on a : $360 = 2^3. 3^2. 5$ et $84 = 2^2. 3.7$
Donc $360 \wedge 84 = 2^2. 3 = 12$
D'autre part : $360 = 84 \times 4 + 24$ donc :
$24 = a - (b \times 4)$
On a : $84 = 24 \times 3 + 12$
Donc : $b - (a- (b \times 4)) \times 3 = 12$
On a : $24 = 12 \times 2 + 0$
Donc : $-3a + 13b = 12$

Exercice3 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x + 36y = 1$ et déterminons une solution particulière de (E).
Solution : On a $17 \wedge 36 = 1$ donc d'après le théorème de $Bézout$; il existe u et v tels que : $17u + 36v = 1$ donc (E) admet une solution.
On pose $a = 36$ et $b = 17$ on obtient :
$a = 2b + 2$ et $b = 8 \times 2 + 1$
Donc : $2 = a - 2b$ et $b = 8 \times (a - 2b) + 1$
D'où : $-8a + 17b = 1$
Donc le couple $(-8,17)$ est une solution de l'équation (E).

Exercice4 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : (E) $7(x-2)=3(y+1)$
Solution : $7(x-2)=3(y+1)\Leftrightarrow 7/3(y+1)$
Or on sait que : $7\wedge3=1$
Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$
Donc $\exists k\in\mathbb{Z}/\ y+1=7k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1$

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}7(x-2)=3(y+1)\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7(x-2)=3\times7k\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3k\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3k+2\\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=7k-1\end{cases}$$
Donc $S=\{(3k+2;7k-1)/\ k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice5 : déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$

Solution :1) 2) $\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n+1/n(n^2+3n-2)$

or on a : $1=(n+1)\wedge n$ car $(n+1)-n=1$(bezout)
Donc : $n+1/n^2+8n-2$
La division euclidienne de n^2+3n-2 par $n+1$
Donne : $n^2+3n-2=(n+1)(n+2)-4$
$n+1/n^2+3n-2$ et $n+1/n+1 \Rightarrow n+1/n^2+3n-2-(n+1)(n+2)$
$\Rightarrow n+1/-4 \Rightarrow n+1/4$
Il faut que $n+1\in\{1;2;4\}$ ce qui entraine :
$n\in\{0;1;3\}$
Inversement : On vérifie que 0 ;1 ;3 vérifient
$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$ Avant de conclure que :
$\frac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{0;1;3\}$

Exercice6: 1)Montrer que : $\forall a\in\mathbb{Z}^*$ et $\forall b\in\mathbb{Z}^*$

on a : $a\wedge b=1\Rightarrow\begin{cases}a\wedge(a+b)=1\\ b\wedge(a+b)=1\\ a\wedge b(a+b)=1\\ (a+b)\wedge ab=1\end{cases}$

Solution: on pose $d=a\wedge(a+b)$
montrons que : $d=1$
$d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/a+b \Rightarrow d/a$ et $d/a+b-a$

$\Rightarrow \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/b\wedge a \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$
ce qui entraine: $1=a\wedge(a+b)$ (1)

de même on montre que : $1=b\wedge(a+b)$ (2)

de (1) et (2) en déduit que **:** $(a+b)\wedge ab=1$

D'après une proposition
Et on a $a\wedge(a+b)=1$ et $a\wedge b=1$ donc

$a\wedge b(a+b)=1$ D'après la même proposition

Exercice7 :
Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$
$(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

Solution :on a **:** $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5)-2(n+2)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout
$(n+2)\wedge(2n+5)=1$ (1)

De même : on a : $2(n+3)-(2n+5)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout
$(n+3)\wedge(2n+5)=1$ (2)

de (1) et (2) en déduit que
$(2n+5)\wedge((n+3)(n+2))=1$

Donc : $(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

Exercice8 : Considérons l'équation :
(E): $756x - 245y = 14$
1- Montrer l'équation (E) admet une solution.
2- Déterminer une solution particulière de (E)
3- Résoudre l'équation (E)

Solution : $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$ et $245 = 5 \times 7^2$
1) On a : $756 \wedge 245 = 7$ et $7|14$ donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$
2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient :
$a = 756$ et $b = 245$
$a = 3 \times b + 21$
$b = 11 \times 21 + 14$
$21 = 14 + 7$
On a donc :$21 = a - 3b$
$b = 11 \times (a - 3b) + 14 \Leftrightarrow 14 = 34b - 11a$
$7 = (a - 3b) - (34b - 11a) \Leftrightarrow 7 = 12a - 37b$
Finalement :$14 = 24a - 74b$ et donc le couple (24,74) est une solution particulière de (E)

D'où : $S=\left\{\left(24-\frac{245}{7}k;74-\frac{756}{7}k\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\{(24-35k;74-108k);k\in\mathbb{Z}\}$

$S=\{(24+35k;74+108k);k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice9 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples

$(x;y)/\begin{cases}x+y=48\\x\wedge y=4\end{cases}$ avec $x\le y$

Solution : $\begin{cases}x+y=48\\x\wedge y=4\end{cases}\Leftrightarrow\exists(x';y')\in\mathbb{N}^2/\begin{cases}x=4x'\\y=4y'\\x+y=48\end{cases}$

$\Leftrightarrow\exists(x';y')\in\mathbb{N}^2/4x'+4y'=48$

$\Leftrightarrow\exists(x';y')\in\mathbb{N}^2/x'+y'=12$

On Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :
$S=\{(0;48);(4;44);(8;40);(12;36);(16;32);(20;28);(24;24)\}$

Exercice10: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant: $\begin{cases}2x\equiv3[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}$

Solution:
$\begin{cases}2x\equiv3[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\equiv-4[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv-2[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}$

Car $2\wedge7=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\equiv5[7]\\3x\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\3x\equiv1[5]\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\3(5+7k)\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\k\equiv1[5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5+7k;k\in\mathbb{Z}\\k\equiv1+5k'\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=5+7(1+5k');k'\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=35k'+12;k'\in\mathbb{Z}$

$S=\{35k'+12;k'\in\mathbb{Z}\}$

Exercice11: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :
$\begin{cases}n\equiv2[11]\\n\equiv3[7]\end{cases}$

Solution : $\begin{cases}n\equiv2[11]\\n\equiv3[7]\end{cases}\Leftrightarrow\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/\begin{cases}n=11x+2\\n=7y+3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/11x+2=7y+3$

$\Leftrightarrow\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/11x-7y=1$

Or on sait que : $7\wedge11=1$
Donc d'après le théorème de Bézout :
$\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2/11u+7v=1$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases}x=u\\y=-v\end{cases}$

Donc $\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2/\begin{cases}n=11x+2\\n=7y+3\end{cases}$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice12: résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: $(E)\quad 5x-3y=1$

Solution : On a : $5\times2-3\times3=1$ donc $(2;3)$ est une solution particulière de l'équation

Donc : $5x-3y=5\times2-3\times3$

Donc : $5(x-2)=3(y-3)\ \Rightarrow 5/3(y-3)$

Or on sait que : $5\wedge3=1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/y-3$

Donc $\exists k\in\mathbb{Z}\,/\,y-3=5k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,/\,y=5k+3$

$$(E)\Leftrightarrow \begin{cases}5(x-2)=3(y-3)\\ \exists k\in\mathbb{Z}\,/\,y=5k+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5(x-2)=3\times5k\\ \exists k\in\mathbb{Z}\,/\,y=5k+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-2=3k\\ \exists k\in\mathbb{Z}\,/\,y=5k+3\end{cases}\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\,/\begin{cases}x=3k+2\\ y=5k+3\end{cases}$$

Donc $S=\{(3k+2;5k+3)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice13 : Montrons que : $(\forall n\geq 2)$: $n^5\equiv n[30]$

Solution : On a : d'après le petit théorème de Fermat : $n^5\equiv n[5]$ Donc : $5/n^5-n$

D'autre part : $n^5-n=n(n^4-1)=n\left((n^2)^2-1\right)$

$n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Donc $2|n(n-1)$ et $3|(n-1)n(n+1)$ et puisque 2 et 3 sont premiers alors $6=(2\times3)$ divise n^5-n

Finalement :

$$\begin{cases}5/n^5-n\\ 6/n^5-n \Rightarrow 30=6\times5/n^5-n\\ 6\wedge5=1\end{cases}$$

Donc : $n^5\equiv n[30]$

Exercice14 :

1) Montrer pour tout entier naturel n, non nul : n^3-n est divisible par 3.

2) Soit p un nombre premier différent de 2, démontrer que $N=\sum_{k=0}^{p-2}2^k$ est divisible par p .

Solution :

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme : Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p\equiv a[p]$

Donc $a^p-a\equiv0[p]$, c'est à dire a^p-a est divisible par p .

$n\in\mathbb{N}^*$et 3 est un nombre premier donc n^3-n est divisible par 3.

Remarques : on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2) $N=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{p-2}$ est la somme des (p−1) premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0=1$

Donc: $N=\dfrac{1-2^{p-1}}{1-2}=2^{p-1}-1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.

On utilise le théorème de Fermat: 2^{p-1}est divisible par p

Par suite : N est divisible par p.

Exercice15 : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p, on a: $a^p\equiv a[p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p\equiv a[p]$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$
3. Démontrer que $a^{561}-a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
4. En déduire que pour tout entier naturel a : $a^{561}-a\equiv0[561]$

Solution :

1) $561=3\times11\times17$

2) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$

Si x est un entier alors :

$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$ est un entier et $x-1$ est un entier.

Conséquence : (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$

Remarque : on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)

3) $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers :$560=2^4\times5\times7$

560 a donc 5×2×2=20 diviseurs de 560

D_{560}={1;2;4;5;7;8;10;14;16;20;28;35;40;56;70;80; 140;280;560}

560=2×280 donc : $a^{560}=(a^2)^{280}$

On pose $x=a^2$ et n=280

$a^{560}-1$est un multiple de a^2-1. Donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^2-1)K$

Par suite, $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

$a^{561}-a=a(a^2-1)K$

$a^{561}-a=(a^3-a)K$

Or a^3-a est divisible par 3

Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 3

a560=$(a^{10})^{56}$ On pose $x=a^{10}$ et n=56

$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{10}-1$.
Donc il existe K ' $\in\mathbb{N}$ tel que: $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$
Par suite,$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$
$a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$
Or $a^{11}-a$ est divisible par 11
Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 11
$a^{560}=(a^{16})^{35}$
On pose $x=a^{16}$ et $n=35$
$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{16}-1$.
Donc il existe K '' $\in\mathbb{N}$ tel que :
$a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$
Par suite $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$
$a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$
$a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$
Or $a^{17}-a$ est divisible par 17
Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 17
4) 3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc premiers entre eux 2 à 2.
$a^{561}-a$ est divisible par 3; 11 et 17.
Donc $a^{561}-a$ est divisible par $3\times11\times17=561$
Par suite: $a^{561}-a\equiv0[561]$
$a^{561}\equiv a[561]$ et pourtant 561 n'est pas un nombre premier.
Donc la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie.

Exercice 16:soit p un nombre premier positif et $a\in\mathbb{N}^*$et $p\wedge a=1$ on pose $F_p(a)=\dfrac{a^{p-1}-1}{p}$

1)verifier que : $F_p(a)\in\mathbb{N}$

2) soit $b\in\mathbb{N}^*$ tel que : $p\wedge b=1$

Démontrer que : $F_p(ab)\equiv F_p(a)+F_p(b)[p]$

Solution :1)on a **:** $p\wedge a=1$ et p un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat :
$a^{p-1}-1\equiv0[p]$ donc : $p/a^{p-1}-1$
Donc : $F_p(a)\in\mathbb{N}$
2) d'après le théorème de Fermat :
$a^{p-1}-1\equiv0[p]$ et $b^{p-1}-1\equiv0[p]$
Donc : $(a^{p-1}-1)(b^{p-1}-1)\equiv0[p^2]$
Donc : $(ab)^{p-1}-a^{p-1}-b^{p-1}+1\equiv0[p^2]$
Donc : $(ab)^{p-1}-1\equiv(a^{p-1}-1)+(b^{p-1}-1)[p^2]$
Donc : $\dfrac{(ab)^{p-1}-1}{p}\equiv\dfrac{a^{p-1}-1}{p}+\dfrac{b^{p-1}-1}{p}[p]$
Donc : $F_p(ab)\equiv F_p(a)+F_p(b)[p]$

Exercice17 :soit $n\in\mathbb{Z}$ on pose :
$u_n=5n^7+7n^5+23n$

1) Démontrer que : $u_n\equiv0[5]$

2) Démontrer que : $u_n\equiv0[7]$

3)en déduire que : $\dfrac{n^7}{7}+\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{23n}{35}\in\mathbb{Z}$

Solution :1)
on a **:** 5est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat : $n^5\equiv n[5]$
et on a **:** $5n^7\equiv0[5]$ et $7n^5\equiv7n\equiv2n[5]$
et $23n\equiv3n[5]$
donc : $u_n=5n^7+7n^5+23n\equiv0[5]$
2) on a **:** 7 est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat : $n^7\equiv n[7]$
et on a **:** $5n^7\equiv5n[7]$ et $7n^5\equiv0[7]$
et $23n\equiv2n[7]$ donc $u_n\equiv7n[5]$
donc : $u_n\equiv0[7]$
3)on a : $5/u_n$ et $7/u_n$ et $5\wedge7=1$
Donc : $5\times7/u_n$ cad $35/u_n$
Donc : $\dfrac{u_n}{35}\in\mathbb{Z}$ donc : $\dfrac{5n^7+7n^5+23n}{35}\in\mathbb{Z}$
donc : $\dfrac{n^7}{7}+\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{23n}{35}\in\mathbb{Z}$

Exercice18 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation
(E): $x^4+781=3y^4$

1)monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv1[5]$ou $x^4\equiv0[5]$

2) monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv2[5]$
Ou $x^4+781\equiv1[5]$

3) en déduire les solutions de l'équation(E)

Solution : 1)on a **:** 5 est un nombre premier donc : a)si 5 ne divise pas x alors :d'après le théorème de Fermat : $x^4\equiv1[5]$
b)si 5 divise x alors :d'après le théorème de Fermat : $x^4\equiv0[5]$
donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv1[5]$ou $x^4\equiv0[5]$
2) on a : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv1[5]$ou $x^4\equiv0[5]$
Donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv2[5]$ou $x^4+781\equiv1[5]$
3)on a : $\forall y\in\mathbb{Z}$: $y^4\equiv1[5]$ou $y^4\equiv0[5]$
Donc : $3y^4\equiv0[5]$ou $3y^4\equiv3[5]$
Mais on a :

$\forall x\in\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x^4+781\equiv 1[5] \\ 3y^4\equiv 0[5]\end{cases}$ ou $\begin{cases} x^4+781\equiv 2[5] \\ 3y^4\equiv 3[5]\end{cases}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$ et $\forall y\in\mathbb{Z}$ $x^4+781\neq 3y^4$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice19 :soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante:

(E) : $36x-25y=5$

1)montrer que si $(x;y)$ est une solution de l'équation (E) alors x est un multiple de 5

2)déterminer une solution particulière de l'équation (E) et résoudre (E)

3) soit $(x;y)$ une solution de l'équation (E)

Et $x\wedge y=d$ .Déterminer les valeurs possibles de d et Déterminer les solutions $(x;y)$ de (E) tel que $x\wedge y=1$

Solution : 1) $(x;y)\in S \Leftrightarrow$ $36x-25y=5$

$\Leftrightarrow 36x=5(1+5y)\Rightarrow 5/36x$

Or on sait que : $5\wedge 36=1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/x$

Donc x est un multiple de 5

Donc : $\exists x'\in\mathbb{Z}$: $x=5x'$

2)déterminons une solution particulière de l'équation (E) ?

On a : $36x-25y=5$ $\Leftrightarrow$ $36\times 5x'-25y=5$

$\Leftrightarrow$ $36x'-5y=1$

On remarque que : $(1;7)$ est une solution particulière de l'équation : $36x'-5y=1$

Donc : $(5;7)$ est une solution particulière de l'équation (E)

$(x;y)\in S\Leftrightarrow 36x-25y=5$ et $36\times 5-25\times 7=5$

$\Leftrightarrow 36(x-5)=25(y-7)$

On a donc : $36/25(y-7)$ Et puisque : $25\wedge 36=1$

Alors : $36/y-7$ Donc :

$\exists k\in\mathbb{Z}/\ y-7=36k\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=36k+7$

$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} 36(x-5)=25(y-7) \\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=36k+7\end{cases}$

$\begin{cases} x-5=25k \\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=36k+7\end{cases}\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\begin{cases} x=25k+5 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/\ y=36k+7\end{cases}$

Inversement : $(25k+5;36k+7)$ est solution de l'équation (E)

Donc $S=\{(25k+5;36k+7)/\ k\in\mathbb{Z}\}$

3)soit $(x;y)\in S$ déterminons : $x\wedge y=d$

On a : $\exists k\in\mathbb{Z}/\ x=25k+5$ et $y=36k+7$

Et on a : $\begin{cases} d/x \\ d/y\end{cases}\Rightarrow d/36x-25y=5$

Donc : $d=1$ ou $d=5$

Si $d=5$ alors $5/y=7+36k$ car $5/x$

Donc : $7+36k\equiv 0[5]$ cad $2+k\equiv 0[5]$ cad $k\equiv 3[5]$

Si $d=1$ alors $k\equiv 4[5]$ ou $k\equiv 2[5]$ ou $k\equiv 1[5]$ ou $k\equiv 0[5]$ donc :

$k=4+5\alpha$ ou $k=2+5\alpha$ ou $k=1+5\alpha$ ou $k=5\alpha$

Avec : $\alpha\in\mathbb{Z}$

Donc : $(x;y)\in S$ et $x\wedge y=1$ ssi

$(x;y)\in\{(125\alpha+30;180\alpha+43);(125\alpha+55;180\alpha+79);$

$(125\alpha+105;180\alpha+151);(125\alpha+5;180\alpha+7);\alpha\in\mathbb{Z}\}$

Exercice20: on pose $A=\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1)soit $a\in A$ discuter suivant a le nombre de solutions de l'équation : (E) $x^2=a$ dans A

2)soient p et q deux éléments de A

On considére l'équation : (F) $x^2-\overline{2}px+q=\overline{0}$

Montrer que l'équation : (E) admet une solution ssi p^2-q appartient à un ensemble B à déterminer

3)application :

a)résoudre dans A l'équation: $x^4+\overline{3}x^2+\overline{4}=\overline{0}$ (G)

b)déterminer les nombres entiers naturels b

Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$

Solution :1) On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	9	$\overline{10}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

l'équation : (E) admet une solution unique dans A si $a=0$

l'équation : (E) admet deux solution différentes dans A si $a\in\{\overline{1};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{9}\}$

l'équation : (E) n'admet pas de solution dans A si $a\in\{\overline{2};\overline{6};\overline{7};\overline{8};\overline{10}\}$

2) $x\in A$; (F) $x^2-\overline{2}px=(x-p)^2-p^2$

$x^2-\overline{2}px+q=\overline{0}\Leftrightarrow (x-p)^2=p^2-q$

l'équation : (F) admet une solution dans A ssi $p^2-q\in\{\overline{0};\overline{1};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{9}\}$ donc : $B=\{\overline{0};\overline{1};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{9}\}$

3) a)résoudre dans A l'équation : $x^2+\overline{3}x+\overline{4}=\overline{0}$ (G) ?

$x^4+\overline{3}x^2+\overline{4}=\overline{0} \Leftrightarrow X^2+\overline{3}X+\overline{4}=\overline{0}$ avec : $X=x^2$

$\Leftrightarrow X^2-\overline{8}X+\overline{16}=\overline{0}$ car $\overline{4}=\overline{15}$ et $\overline{3}=-\overline{8}$

$\Leftrightarrow \left(X-\overline{4}\right)^2=\overline{1} \Leftrightarrow X-\overline{4}=\overline{1}$ ou $X-\overline{4}=\overline{10}$

$(G) \Leftrightarrow X=\overline{5}$ ou $X=\overline{3}$

$\Leftrightarrow x^2=\overline{5}$ ou $x^2=\overline{3}$

$\Leftrightarrow x=\overline{4}$ ou $x=\overline{7}$ ou $x=\overline{5}$ ou $x=\overline{6}$

Donc : l'ensemble des solutions de (G) est :

$S=\left\{\overline{4};\overline{5};\overline{6};\overline{7}\right\}$

3)b)déterminons les nombres entiers naturels b Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$?

On a : $\overline{10304}_{(b)}=b^4+3b^2+4$

$11 / \overline{10304}_{(b)} \Leftrightarrow b^4+3b^2+4\equiv 0[11]$

$\Leftrightarrow \overline{b}^4+\overline{3}\overline{b}^2+\overline{4}=\overline{0}$ dans A

$\Leftrightarrow \overline{b}\in\left\{\overline{4};\overline{5};\overline{6};\overline{7}\right\}$

$\Leftrightarrow \overline{b}\in\overline{4}\cup\overline{5}\cup\overline{6}\cup\overline{7} \Leftrightarrow b=11k+r$ et $r\in\{4;5;6;7\}$

Et $k\in\mathbb{N}$

Exercice21: On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1

1) Soit p un nombre premier quelconque divisant 4 m+ 3 .
Montrer que p est impair et que :

$(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p\equiv 1[4]$

3. En utilisant la décomposition de 4 m+ 3 en facteurs premiers obtenir une contradiction

Solution :

1) $4m\equiv 0[2]$ donc $4m+3\equiv 3[2]$ donc

$4m+3\equiv 1[2]$

4 m+ 3 n'est pas divisible par 2 donc p≠2 et donc p est impair.
p est impair donc p=2 q+ 1 avec q∈ℕ
p est un diviseur de 4 m+ 3
4 m+ 3 est un diviseur de 4 a^2+ 1
Donc p est un diviseur de 4 a^2+ 1

Par suite : $4a^2+1\equiv 0[p]$ donc $4a^2\equiv -1[p]$

donc $(2a)^2\equiv -1[p]$ donc $(2a)^{2q}\equiv(-1)^q[p]$

Or, $2q\equiv p-1$ donc $q\equiv\dfrac{p-1}{2}$

On a donc : $(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

2) Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que p et 2a sont premiers entre eux.
p étant un nombre premier il suffit de vérifier que p n'est pas un diviseur de 2a.
On suppose que $2a\equiv 0[p]$

On a alors $4a^2\equiv 0[p]$ et donc $4a^2+1\equiv 1[p]$

Or, on a vu dans la question précédente que :

$4a^2+1\equiv 0[p]$

Donc p n'est pas un diviseur de 2a et p et 2a sont premiers entre eux
D'après le théorème de Fermat :

$(2a)^{p-1}\equiv 1[p]$

Or d'après la première question :

$(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

On a donc: $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1[p]$

Cela signifie que $\dfrac{p-1}{2}$ est un nombre pair.

Or $q\equiv\dfrac{p-1}{2}$ Donc q est un nombre pair.

Il existe q' ∈ℕ tel que q=2 q'
p=2 q+ 1
p=4 q'+ 1
et donc : $p\equiv 1[4]$

3) 4 m+ 3= $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}\equiv 1[p]$

p_1 ; p_2 ;…. : p_m sont des nombres premiers distincts.et α_1;α_2;…;α_m sont des entiers naturels non nuls.

p_1 ; p_2 ;…. : p_m sont des nombres premiers qui divisent 4 m+ 3
D'après la question précédente :

$p_1\equiv 1[4]$ et $p_2\equiv 1[4]$ et …… et $p_m\equiv 1[4]$

Donc : $p_1^{\alpha_1}\equiv 1[4]$; $p_2^{\alpha_2}\equiv 1[4]$… $p_m^{\alpha_m}\equiv 1[4]$

Par suite : $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}\equiv 1[4]$

$4m+3\equiv 1[4]$

Or, $4m\equiv 0[4]$ donc : $4m+3\equiv 3[4]$

Il y a contradiction, il n'existe pas des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:
(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1

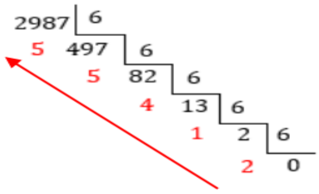
Exercice22 : Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a N=n^{13}−n est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

Solution :13 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :

$n^{13}-n$ est divisible par 13.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$
$12=2^2\times 3$ donc :Le nombre 12 à 6 diviseurs
$D_{12}=\{1 ;2 ;3;4;6;12\}$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-n)(n^6+1)$
7 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :
n^7-n est divisible par 7.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 7.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$n[(n^4)^3-1]$est un multiple de n^4-1
Donc il existe K $\in\mathbb{N}$ tel que : $(n^4)^3-1=(n^4-1)K$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)= n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)\ K=(n^5-n)K$
5 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^5-n est divisible par 5. Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 5
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$(n^2)^6-1$ est un multiple de n^2-1 .
Donc il existe K ' $\in\mathbb{N}$ tel que : $(n^2)^6-1=(n^2-1)\ K'$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1) =(n^3-n)\ K'$
3 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^3-n est divisible par 3.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 3.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$n^{12}-1$ est un multiple de $n-1$
Donc il existe K'' $\in\mathbb{N}$ tel que: $n^{12}-1=(n-1)K''$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$
2 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^2-n est divisible par 2.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 2.

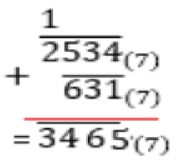
Exercice50 :
1) Soient p et q deux nombres premiers distincts montrer que $p^{q-1}+q^{p-1}\equiv 1\ [pq]$
2) Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation :
(E) : $x^4+781=3y^4$
Et soit S son ensemble de solution :
a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\ (x^4\equiv 1\ [5]$ ou $x^4\equiv 0\ [5])$
b) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{Z})\ (x^4+781\equiv 2\ [5]$ ou $x^4+781\equiv 1\ [5])$
c) Déterminer l'ensemble S.

Exercice23 : Soit Le nombre $n=\overline{2987}_{(10)}$
Écrire n dans la base 6 :
Solution :
On a : $2987 = 6\times 497+5$
$497 = 6\times 82+5$
$82 = 6\times 13+4$
$13 = 6\times 2+1$
$2 = 6\times 0+2$
Donc $2987 = 2\times 6^4+1\times 6^3+4\times 6^2+5\times 6+5$
$n=\overline{21455}_{(6)}$
Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme suite :

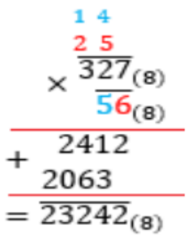


Exercice24 :soit $N=\overline{dcba}_{(10)}$ un entier naturel
montrer que : $N\equiv a-b+c-d\,[11]$
Solution :
on a : $N=\overline{dcba}=a+b\times 10+c\times 10^2+d\times 10^3$
et on a : $10\equiv -1[11]$et $10^2\equiv 1[11]$ et $10^3\equiv -1[11]$
Donc : $N\equiv a-b+c-d\,[11]$

Exercice25 : calculer :
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}$
Solution :
a) La décomposition :
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=2\times 7^3+5\times 7^2+3\times 7^1+4\times 7^0+$
$+6\times 7^2+3\times 7^1+1\times 7^0$
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=2\times 7^3+11\times 7^2+6\times 7^1+5\times 7^0$
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=3\times 7^3+4\times 7^2+6\times 7^1+5\times 7^0$
$\overline{2534}_{(7)}+\overline{631}_{(7)}=\overline{3465}_{(7)}$
b) Calcul direct avec le retenu



Exercice26: calculer
1) $\overline{327}_{(8)}\times\overline{56}_{(8)}$ 2) $\overline{432}_{(5)}\times\overline{134}_{(5)}$
Solution : Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant le calcul direct avec le retenu car la décomposition risque d'être longue :



$\overline{327}_{(8)}\times\overline{56}_{(8)}=\overline{23242}_{(8)}$
Pour vérifier : $\overline{327}_{(8)}\times\overline{56}_{(8)}$
$= (3\times 8^2+2\times 8+7)\times(5\times 8+6)$
$= 9890=\overline{23242}_{(8)}$
2) $\overline{432}_{(5)}\times\overline{134}_{(5)}$
$= (4\times 5^2+3\times 5+2)\times(5^2+3\times 5+4)$
$= 4\times 5^4+3\times 5^3+2\times 5^2+12\times 5^3+9\times 5^2+6\times 5$
$+16\times 5^2+12\times 5+8$
$= 5^5+3\times 5^4+5^3+4\times 5+3$

$=\overline{131043}_{(5)}$

Exercice27 : effectuer dans la base 9

$\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)}$

Solution :

$\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)} =$

= (6 × 7^3 + 4 × 7^2 + 3 × 7 + 2) × (5 × 8 + 4)

= 100188

= 1 × 9^5 + 6 × 9^4 + 2 × 9^3 + 3 × 9^2 + 8 × 9 + 0

$=\overline{162380}_{(9)}$

Exercice28 : monter que

1) $x \equiv 0$ [5] ⇔ a_0 = 0 ou a_0 = 5

2) $x \equiv 0$ [25] ⇔ $\overline{a_1a_0} \in \{0,25,50,75\}$

3) $x \equiv 0$ [3] ⇔ $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0$ [3]

4) $x \equiv 0$ [9] ⇔ $\sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0$ [9]

5) $x \equiv 0$ [11] ⇔ $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0$ [11]

6) $x \equiv 0$ [4] ⇔ $\overline{a_1a_0} \equiv 0$ [4]

Exercice29 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$

où $(a_n;b_n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

Montrer que : $a_n \wedge b_n = 1$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

En développant $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ par la formule du binôme de Newton et en séparant les termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant pair des termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant impair, on écrit $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ sous la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n;b_n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$. Un calcul conjugué fournit

$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ et donc :

$\left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)^n = (-1)^n = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)$

$(-1)^n = a_n^{\,2} - 2b_n^{\,2}$ Ou finalement :

$\left((-1)^n \times a_n\right)a_n + \left(2(-1)^{n+1} \times b_n\right) \times b_n = 1$

donc : $ua_n + vb_n = 1$

où u = $(-1)^n \times a_n$ et v = $2(-1)^{n+1} \times b_n$

Sont des entiers relatifs. Le théorème de Bézout permet d'affirmer a_n et b_n sont premiers

Entre eux.

Exercice30 :1) Montrer que $\forall (k;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ et $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$

2) Montrer que $\forall (k;n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

$k \wedge n = 1 \Rightarrow n / C_n^k$

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n+1 / C_{2n}^n$

Solution : 1)

$kC_n^k = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\left((n-1)-(k-1)\right)!} = nC_{n-1}^{k-1}$

$(n+1)C_{2n}^{n-1} = (n+1)\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \dfrac{(2n)!}{n!(n-1)!}$

$nC_{2n}^n = n\dfrac{(2n)!}{n!(n)!} = \dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n)!}$ cqfd

2)on a : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ Donc n / kC_n^k et puisque k et n sont premiers entre eux , le théorème de Gauss permet d'affirmer que n / C_n^k

3) De même, on a : $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$

Donc : $n+1 / nC_{2n}^n$ et on montre que

n et (n + 1) sont premiers entre
eux (d'après Bézout puisque (n + 1) − n = 1
donc d'après le théorème de Gauss : $n+1 / C_{2n}^n$

Exercice 31 : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (Nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Solution :

Soient n et m deux entiers naturels tels que n < m. Posons m = n + k avec k > 0. On note que

$F_m = 2^{2^{n+k}} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^k} + 1 = \left(F_n - 1\right)^{2^k} + 1$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de Newton et en tenant compte du fait que 2^kest pair

Puisque k est strictement positif, on obtient une expression de la forme

$F_m = qF_n + 1 + 1 = qF_n + 2$ Où q est un entier.

Le PGCD de F_n et F_m doit encore diviser :

$F_m - qF_n = 2$ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque 2^n et 2^m sont strictement positifs F_n et F_m sont impairs et leur PGCD vaut donc 1 (ce résultat redémontre aussi l'existence d'une infinité de nombres premiers).

Exercice 32 :

1) Montrer que $\forall n\in\mathbb{Z}, 6 / 5n^3+n$

2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 7 / 4^{2^n}+2^{2^n}+1$

Solution :

1) Soit n un entier relatif.

• Si n est pair, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0$ [2] ou encore $5n^3 + n \equiv 0$ [2]. Dans ce cas, $5n^3 + n$ est divisible par 2.

Si n est impair, alors $5n^3 + n \equiv 5\times1^3 + 1$ [2] ou encore $5n^3 + n \equiv 6$ [2] ou enfin $5n^3 + n \equiv 0$ [2]. Dans ce cas aussi, $5n^3 + n$ est divisible par 2.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $2 \mid (5n^3 + n)$.

• Si n est multiple de 3, alors :

$5n^3 + n \equiv 5 \times 0^3 + 0$ [3] ou encore $5n^3 + n \equiv 0$ [3].

Dans ce cas, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Si n est de la forme 3k + 1 où k ∈ Z, alors $5n^3 + n \equiv 5 \times 1^3 + 1$ [3] puis $5n^3 + n \equiv 6$ [3] et donc $5n^3 + n \equiv 0$ [3].

Par suite, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Si n est de la forme 3k + 2 où k ∈ Z, alors , $5n^3 + n \equiv 5 \times 2^3 + 2$ [3] puis $5n^3 + n \equiv 42$ [3] et donc $5n^3 + n \equiv 0$ [3].

Dans ce cas aussi, $5n^3 + n$ est divisible par 3.

Finalement, ∀n ∈ Z, $3 \mid (5n^3 + n)$.

Enfin, pour tout n ∈ Z, $5n^3 + n$ est divisible par les nombres premiers 2 et 3 et donc par :

2 × 3 = 6. On a montré que $\forall n\in\mathbb{Z}$, $6 \mid (5n^3 + n)$.

2) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}, 7 / 4^{2^n}+2^{2^n}+1$

2) 4^{2^n} signifie $(...((4^2)^2)^2...)^2$

Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7.

$4^{2^0} = 4$ et donc $4^{2^0} \equiv 4$ [7].

Ensuite, $4^{2^1} \equiv 16$[7] ou encore $4^{2^1} \equiv 2$ [7].

Ensuite, $4^{2^2} \equiv 2^2$[7] ou encore $4^{2^2} \equiv 4$ [7] ...

Montrons par récurrence que :

$\forall k\in\mathbb{N}$, $4^{2^{2k}} \equiv 4$ [7] et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2$ [7].

• C'est vrai pour k = 0.

• Soit k > 0. Supposons que :

$4^{2^{2k}} \equiv 4$ [7] et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2$ [7].

Alors : $4^{2^{2k+2}} = \left(4^{2^{2k+1}}\right)^2 \equiv (2)^2 \equiv 4[7]$

$4^{2^{2k+3}} = \left(4^{2^{2k+2}}\right)^2 \equiv (4)^2[7] \equiv 2[7]$

On a montré par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N}$

$4^{2^{2k}} \equiv 4$ [7] et $4^{2^{2k+1}} \equiv 2$ [7].

Ensuite 2

$2^{2^0} \equiv 2$ [7] et $2^{2^1} \equiv 4$ [7]

puis, pour n > 1, $2^{2^n} = 2^{2\times2^{n-1}} = \left(2^2\right)^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} = 2$

donc : $2^{2^{2k}} \equiv 2$ [7] et $2^{2^{2k+1}} \equiv 4$ [7].

Ainsi, que n soit pair ou impair $4^{2^n}+2^{2^n} \equiv 6[7]$

donc : $4^{2^n}+2^{2^n}+1 \equiv 0[7]$

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}, 7 / 4^{2^n}+2^{2^n}+1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien