***TD :* Exercices d'applications avec solutions**

PROF : ATMANI NAJIB 2BAC SM BIOF

http://www.xriadiat.com

TD avec solutions : FONCTIONS PRIMITIVES

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

1)Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que : $F(1)=3$

Solution :1) $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

Donc :

Donc : $F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $F(1)=3\Leftrightarrow \frac{2}{3}\times1^3+\frac{1}{2}\times1^2+1-\frac{1}{1}+k=3$

$F(1)=3\Leftrightarrow \frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-1+k=3\Leftrightarrow \frac{7}{6}+k=3\Leftrightarrow k=\frac{11}{6}$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que : $F(1)=3$ est :

$F(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{11}{6}$

Exercice2 : (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=5x^4+3x+1$ 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x$ 4) $f(x)=(2x-1)^3$

5) $f(x)=\frac{x}{(x^2-1)^2}$ 6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$

7) $f(x)=\frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ 8) $f(x)=7x\cos(\pi x^2+3)$

Solutions : 1) $f(x)=5x^4+3x+1$

$F(x)=5\times\frac{1}{5}x^5+3\times\frac{1}{2}x^2+1x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\cos x+\sin x-1$

$F(x)=2\sqrt{x}+\sin x-\cos x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sin x+x\cos x=x'\sin x+x(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(2x-1)^3=\frac{1}{2}(2x-1)'(2x-1)^3$

$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}(2x-1)^{3+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

$F(x)=\frac{1}{8}(2x-1)^4+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=-\frac{x}{(x^2-1)^2}$

on doit remarquer que : $f(x)=-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite : $F(x)=\frac{1}{x^2-1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=5x\sqrt[3]{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=3x^2+1$ donne $u'(x)=6x$ et par suite : $f(x)=\frac{5}{6}u'(x)\sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'\sqrt[n]{u}$ (n = 3))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{5}{6}\frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4(x)}+k$

$F(x)=\frac{5}{8}\sqrt[3]{(3x^2+1)^4}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x)=\frac{4x+1}{\left(2x^2+x\right)^4}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=2x^2+x$ donne $u'(x)=4x+1$

et par suite : $f(x)=\frac{u'(x)}{u^4(x)}=u'(x)u^{-4}(x)$

on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u'u^n$ (n = -4))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{1}{-4+1}u^{-4+1}(x)+k$

$$F(x)=-\frac{1}{3}\left(2x^2+x\right)^{-3}+k=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left(2x^2+x\right)^3}+k$$

8) $f(x)=7x\cos\left(\pi x^2+3\right)$

On doit remarquer que :

la fonction $u(x)=\pi x^2+3$ donne $u'(x)=2\pi x$

et par suite : $f(x)=\frac{7}{2\pi}u'(x)\cos\left(u(x)\right)$

(c'est de la forme : $u'\times\left(v'\circ u\right)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme : $F(x)=\frac{7}{2\pi}\sin\left(\pi x^2+3\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice3 : Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{2}{x^2+2x+4}$ 2) $f(x)=\frac{6}{x^2+x+1}$

Solutions : 1) $f(x)=\frac{2}{x^2+2x+4}$

il faut faire des transformations :

A remarquer que $f(x)=\frac{2}{(x+1)^2+3}$

Ce que nous laisse penser à la fonction $arctan$

$$f(x)=\frac{2}{3\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

(C'est de la forme : $\frac{u'}{(u)^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions

$F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{6}{x^2+x+1}$

A remarquer que $f(x)=\frac{6}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$f(x)=\frac{6}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}=8\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)'}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

(C'est de la forme : $\frac{u'}{(u)^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est strictement négatif.

Exercice4 : Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{2}{4x^2+4x+1}$ 2) $f(x)=\frac{6}{x^2+x+1}$

Solutions : 1) A remarquer que

$f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}=(-3)\left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}\right)$ (C'est de la forme: $-\frac{u'}{u^2}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont

les fonctions : $F(x)=\frac{-3}{2x+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$f(x)=\frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$ où le discriminant Δ est nul

Exercice5 : Soit la fonction f définie par :
$f(x) = 2x + 1$ si $x \le 1$
$f(x) = 2x - 1$ si $x > 1$
Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur $\mathbb{R}$

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$; (elle n'est pas continue en 1)
en effet : $f(1)=3$ et $\lim_{x\to1^+} f(x)=1\neq f(1)$

$F_1(x)=x^2+x+k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]-\infty, 1]$.

$F_2(x)=x^2-x+k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ alors ils existent k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x)=x^2+x+k_1 ; si ... x\le 1 \\ F_2(x)=x^2-x+k_2 ; si ... x\succ 1\end{cases}$$

et que F soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$(\forall x\in\mathbb{R}); F'(x)=f(x)$

On a F est dérivable sur $]-\infty, 1[$
et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$
et F est dérivable sur $]1, +\infty[$
et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$
Le problème il faut déterminer (s'ils existent) k_1 et k_2 dans $\mathbb{R}$ pour que F soit dérivable en 1 et que : $F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1)=2+k_1$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$\lim_{x\to1^+}F(x)=\lim_{x\to1^-}F(x)=F(1)$

On en déduit que $2+k_1=k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x+k_2-2-k_1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-2+k_2-k_1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x-2+2+k_1-k_1}{x-1}$$

Car : $2+k_1=k_2$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x=1=F_d'(1)$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+x+k_1-2-k_1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}x+2=3=F_g'(1)$$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F_d'(1)\neq F_g'(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Exercice6 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

1) $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}$ 2) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}$

3) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x$ 4) $f(x)=(4x+5)^2$

5) $f(x)=2\sqrt{2x+1}$ 6) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ 8) $f(x)=\tan^2 x$

9) $f(x)=\cos^4 x$ (utiliser : cos^2x =(1+$cos2x$)/2))

10) $f(x)=\sin^3 x$ (Remarquer que : $sin^3 x = sinx\ sin^2x$)

Solutions : 1) il faut faire des transformations : a remarquer que :

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}=\frac{x^2+1+4}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}=1+4\frac{1}{x^2+1}$$

Ce que nous laisse penser à la fonction $arctan$

(C'est de la forme : $\frac{1}{x^2+1}$)

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont les fonctions : $F(x)=x+4\arctan x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}}=-(2+\cos x)'(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$

(c'est de la forme : $u'u^n$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F(x)=-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}(2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1}+k=-\frac{3}{2}(2+\cos x)^{\frac{2}{3}}+k$$

$F(x)=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=2x\sin x+x^2\cos x=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

Donc : $F(x)=x^2\times\sin x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(4x+5)^2=\frac{1}{4}(4x+5)'(4x+5)^2$

$$F(x)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2+1}(4x+5)^{2+1}+k$$

$F(x)=\frac{1}{12}(4x+5)^3+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $f(x)=2\sqrt{2x+1}=(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc : $F(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$F(x)=\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{2x+1}\right)^3+k$$

6) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$F(x)=\sqrt{x^2+1}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}+k=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+k$$

$F(x)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

8) $f(x)=\tan^2 x=(1+\tan^2 x)-1$

$F(x)=\tan x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

9) $f(x)=\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$f(x)=\frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

$F(x)=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

10) $f(x)=\sin^3 x=\sin x\times\sin^2 x=\sin x\times(1-\cos^2 x)$

$$f(x)=\sin x-\sin x\times\cos^2 x=\sin x+(\cos x)'\times\cos^2 x$$

$F(x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice7: Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$

par : $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1)Déterminer les réels a et b tels que :

$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$ $\forall x\in[0;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[0;+\infty[$ tel que : $F(1)=\frac{5}{2}$

Solution :1)

$$f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}=\frac{a(x+1)^2+b}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$$

Donc : $\begin{cases}a=1\\2a=2\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a=1\\b=-1\end{cases}$ donc : $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$

2) $f(x)=1-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$ Donc : $F(x)=x+\frac{1}{x+1}+k$

$k\in\mathbb{R}\quad \forall x\in[0;+\infty[$

Exercice8: Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$

par : $f(x)=x\sqrt{x-1}$

1)montrer que : $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}\quad \forall x\in[1;+\infty[$

2)Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1;+\infty[$ tel que : $F(2)=1$

Solution :1) $\forall x\in[1;+\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)^2}\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=|x-1|\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}$$

On a : $x\in[1;+\infty[$ donc : $x\geq 1$ donc : $x-1\geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}=(x-1)\times\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}-1\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=x\sqrt{x-1}$$

2) $f(x)=\sqrt{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}\ \forall x\in[1;+\infty[$

$$f(x)=\left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=(x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Donc : $F(x)=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}(x-1)^{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-1)^{\frac{1}{2}+1}+k$

$$F(x)=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+k$$

$$F(x)=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3+k\qquad k\in\mathbb{R}$$

Exercice9: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$$

1)Déterminer les réels a et b et c tels que :

$$f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+4)^2}+c\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

2)Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0)=c$

Solution :1)

$$f(x)=\frac{ax+b}{(x^2+4)^2}+c=\frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2}=\frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$f(x)=\frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2}$ donc :

$\begin{cases}c=5\\8c=40\\a=20\\b+16c=80\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=5\\c=5\\a=20\\b=0\end{cases}$ donc : $f(x)=\frac{20x}{(x^2+4)^2}+5$

2) $f(x)=\frac{20x}{(x^2+4)^2}+5\Leftrightarrow f(x)=10\frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}+5$

Donc : $F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+k\qquad k\in\mathbb{R}$

$$F(0)=5\Leftrightarrow -\frac{10}{4}+k=5\Leftrightarrow k=\frac{15}{2}$$

$$F(x)=-\frac{10}{x^2+4}+5x+\frac{15}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

CALCULS INTEGRALES: *Exercices avec solutions*

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1(2x+3)\,dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta$

Solution :1)la fonction $x\mapsto 3x$ est continue sur $[2;4]$

Une primitive sur $[2;4]$ est : $x\mapsto\frac{3}{2}x^2$

Donc : $I=\int_2^4 3x\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2\right]_2^4=\frac{3}{2}\times4^2-\frac{3}{2}\times2^2=18$

2) $J=\int_0^1(2x+3)\,dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=(1+3)-(0)=4$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt=[\ln t]_e^{e^2}=\ln e^2-\ln e=2-1=1$

4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta=\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin0=\frac{1}{2}$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx$ 2) $I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ 4) $I_4=\int_0^{\ln2}e^{2t}dt$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln2}}te^{-t^2}dt$ 6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2x}{x}dx$

7) $I_7=\int_0^{\ln2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ 8) $I_8=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

9) $I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ 10) $I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11) $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$ 12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3x\,dx$

13 $I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx$ 14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos3x)\,dx$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2x\,dx$ 16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3x}{x}dx$ 18) $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ 20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

Solution :1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx=\left[2\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\left[x^2-x\right]_0^2$

$I_1=\left(2^2-2\right)-\left(0^2-0\right)=4-2=2$

$I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{4}x^4+2x\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1$

$I_2=\left[\frac{1}{5}x^5-1x^4+2x\right]_{-1}^1=\left(\frac{1}{5}1^5-1^4+2\right)-\left(\frac{1}{5}(-1)^5-(-1)^4-2\right)$

$I_2=\left(\frac{1}{5}-1+2\right)-\left(-\frac{1}{5}-1-2\right)=\frac{1}{5}-1+2+\frac{1}{5}+1+2=\frac{2}{5}+4=\frac{22}{5}$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

4) $I_4=\int_0^{\ln2}e^{2t}dt=\int_0^{\ln2}\frac{1}{2}(2t)'e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln2}=\frac{1}{2}e^{2\ln2}-\frac{1}{2}e^{2\times0}$

$I_4=\frac{1}{2}e^{\ln2^2}-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}4-\frac{1}{2}e^0=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln2}}te^{-t^2}dt=\int_0^{\sqrt{\ln2}}-\frac{1}{2}\left(-t^2\right)'e^{-t^2}dt=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln2}}$

$I_5=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln2}}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln2}\right)^2}+\frac{1}{2}e^{-0^2}=-\frac{1}{2}e^{-\left(\sqrt{\ln2}\right)^2}+\frac{1}{2}$

$I_5=-\frac{1}{2}e^{-\ln2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{\ln2}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

6) $I_6=\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\times\ln^2 x dx=\int_1^e \ln' x\times\ln^2 x dx$

$I_6=\left[\frac{1}{2+1}\ln^{2+1} x\right]_1^e=\frac{1}{3}\ln^3 e-\frac{1}{3}\ln^3 1=\frac{1}{3}$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^{\ln 2}$

$I_7=\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-\ln\left|e^0+1\right|=\ln|3|-\ln|2|=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{e^x-e^{-x}}dx=\left[\ln\left|e^x-e^{-x}\right|\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I_8=\ln\left|e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right|=\ln\left|3-\frac{1}{e^{\ln 3}}\right|-\ln\left|e^{\ln 2}-\frac{1}{e^{\ln 2}}\right|$

$I_8=\ln\left|3-\frac{1}{3}\right|-\ln\left|2-\frac{1}{2}\right|=\ln\left(\frac{8}{3}\right)-\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}}\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$

9) $I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^1 dx=\left[\frac{1}{1+1}(\ln x)^{1+1}\right]_1^e$

$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx=\frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$I_9=\int_1^e\frac{1}{x}\ln x dx=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

$I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\int_2^3\frac{\left(x^2+3x-4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}}dx=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3$

$I_{10}=2\left[\sqrt{x^2+3x-4}\right]_2^3=2\left(\sqrt{14}-\sqrt{6}\right)$

$I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(2x+1)'(2x+1)^{\frac{1}{2}}dx=2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$

$I_{11}=2\left[\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}(3)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}(1)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\left(\left(\sqrt{(3)}\right)^3-1\right)=\frac{4}{3}\left(3\sqrt{(3)}-1\right)$

12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)'\sin^3 x dx=\left[\frac{1}{4}\sin x^{3+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$I_{12}=\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin^4 0=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$

$I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx=3\int_1^2(3x-4)^{-5}dx=\int_1^2(3x-4)'(3x-4)^{-5}dx$

$I_{13}=\left[\frac{1}{-5+1}(3x-4)^{-5+1}\right]_1^2=\left[\frac{1}{-4}(3x-4)^{-4}\right]_1^2=\frac{1}{-4}(2)^{-4}-\frac{1}{-4}(-1)^{-4}$

$I_{13}=\frac{1}{-4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{64}+\frac{16}{64}=\frac{15}{64}$

14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)dx=\left[2x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$I_{14}=\left(2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\sin\pi\right)-0=\frac{2\pi}{3}$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx$

(on a : $\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$: linearization) Donc:

$I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx$

$I_{15}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$I_{15}=\frac{\pi+2}{8}$

16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{2x+1}\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln|3|+1-\frac{1}{2}\ln|1|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\times\ln^3 x dx=\int_1^e\ln' x\times\ln^3 x dx$

$I_{17}=\left[\frac{1}{3+1}\ln^{3+1}x\right]_1^e=\frac{1}{4}\ln^4 e-\frac{1}{4}\ln^4 1=\frac{1}{4}$

$I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}\left((x-1)^2\right)'e^{(x-1)^2}dt=\left[\frac{1}{2}e^{(x-1)^2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e=\frac{1}{2}(1-e)$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx$

$I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx=\int_1^2\frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx=\left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$

$I_{19} = \ln|1+\ln 2| - \ln|1+\ln 1| = \ln|1+\ln 2| = \ln(1+\ln 2)$

20) $I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+(\tan x)^2 - 1 dx$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(1+(\tan x)^2\right)-1\right) dx = [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

21) $I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x}\right) dx$

$$= \left[\frac{8}{9}x^9 - 4x + 2\ln x\right]_1^e = \frac{8}{9}e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

Formules importantes : $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$; $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin(2a) = 2\sin a \times \cos a$

Exercice3 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^3 |x-1| dx$ 2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

Solution :1)on a $x \in [0,3]$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ on va étudier le signe de : $x-1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

la Relation de Chasles donne :

$$I = \int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx$$

$$I = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}-3\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{5}{2}$$

2) $J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx$

$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

on va étudier le signe de : $x(x+1)$

a)si $x \in [-2;-1]$ alors : $x(x+1) \geq 0$

donc : $|x(x+1)| = x(x+1)$

b)si $x \in [-1;0]$ alors : $x(x+1) \leq 0$

$|x(x+1)| = -x(x+1)$

La Relation de Chasles donne :

$$J = \int_{-2}^0 |x(x+1)| dx = \int_{-2}^{-1} |x(x+1)| dx + \int_{-1}^0 |x(x+1)| dx$$

$$J = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx$$

$$J = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0$$

$$J = \left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(0 - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) = 1$$

Exercice4 : on pose: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

Calculer $I+J$ et $I-J$ et en déduire I et J

Solution :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2}[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

$\begin{cases} I + J = \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{1}{2} \end{cases}$ par sommation on trouve: $2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

donc : $I = \frac{\pi+2}{8}$ et on replace dans dans la 1ére

équation et on trouve: $\frac{\pi+2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$

Donc: $J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi - 2}{8}$

Exercice5 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{\left(x^2 - 4x\right)^2} dx$ 2) $I = \int_0^{\ln 3} |2 - e^x| dx$

3) $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

Solution : 1) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
étude du signe de: $x-2$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$x-2$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

La Relation de Chasles donne :

$$I=\int_1^3 \frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx=\int_0^2 \frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3 \frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\int_0^2 \frac{-(x-2)}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\int_2^3 \frac{x-2}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{-\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx+\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{\left(x^2-4x\right)'}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_1^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-4x}\right]_2^3$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-4}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

$$2-e^x\geq 0 \Leftrightarrow e^x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq \ln 2$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left|2-e^x\right|dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x-2dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I=\left((2\ln 2-2)+1\right)+\left((3-2\ln 3)-(2-2\ln 2)\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Exercice 6: Calculer l' intégrale suivante :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx$$

Solution : On remarque que : $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$

donc : $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx=\int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

et la linéarité de l'intégrale donne :

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$$

$$I=\frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_0^1$$

$$I=-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{4}\left(\ln 3-\ln 2\right)=-\frac{1}{4}\ln 3$$

Exercice7 :on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx$

1)montrer que : $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Solution :1)on a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ donc :

$$\cos^4 x=\left(\frac{e^{iX}+e^{-iX}}{2}\right)^4$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

Or on sait que :

$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ t $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

Donc : $\cos^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(2\cos 4x\right)+4\left(2\cos 2x\right)+6\right)$

Donc: $\cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)$

2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)dx$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

Exercice8 :d'application Soit f : $x \to e^{-x^2}$

Définie sur R.
Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale $F(a) = \int_1^a f(x)dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$0 \leq F(a) \leq e^{-1}$.

Solution :1) Une exponentielle étant toujours positive : $0 \leq f(x)$ pour tout réel x et donc en particulier pour tout $x \geq 1$. De plus, si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, c'est-à-dire $-x \geq -x^2$ et donc $e^{-x} \geq f(x)$ par croissance de la fonction exponentielle.
On en déduit donc que pour tout réel $x \geq 1$

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$

2) À partir de l'inégalité obtenue, on utilise la propriété précédente sur l'intervalle [1 ; a] et ainsi

$\int_1^a 0dx \leq \int_1^a f(x)dx \leq \int_1^a e^{-x}dx$

$0 \leq F(a) \leq \left[-e^{-x}\right]_1^a$ Donc

$0 \leq F(a) \leq -e^{-a} + e^{-1} \leq e^{-1}$ donc : $0 \leq F(a) \leq e^{-1}$

ce qui démontre l'inégalité voulue.

Exercice9 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \leq \frac{1}{3}$

Solution :on a $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1$

Donc : $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$

Donc : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx \leq \int_0^1 x^2dx$

Donc : $\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$ Donc : $\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3}$

Exercice10 :soit la suite numérique (u_n)définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n)est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution :1) $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}}dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$

$= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n-1-x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx$

On sait que : $0 \leq x \leq 1$ donc : $0 \leq 1-x$

Et on a: $\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$ car $0 \leq x$

Donc : $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$

Donc: $\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})}dx \geq 0$

Donc: $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc:(u_n)est croissante

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a : $x \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n+1} \leq 1$

Donc: $\int_0^1 \frac{1}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \leq \int_0^1 1dx$

Donc: $\frac{1}{2}[x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx \leq [x]_0^1$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice11 :soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que :

$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall x\in[0;1]\ :\ \frac{e^{nx}}{1+e}\leq\frac{e^{nx}}{1+e^{x}}\leq\frac{e^{nx}}{2}$

2) En déduire: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

Exercice12 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $A=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$ 2) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx$

3) $C=\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx$

Solution : 1) $A=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$=[ar\tan t]_0^1=ar\tan 1-ar\tan 0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$

2) $B=\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^3dx$

$=\left[\frac{(\ln x)^4}{4}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^4}{4}-\frac{(\ln 1)^4}{4}=\frac{1}{4}$

3) $C=\int_0^{\sqrt{3}}2x\sqrt{x^2+1}dx=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2+1)(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$=\left[\frac{(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}(2-1)=\frac{2}{3}$

Exercice13 : Calculer l' intégrale suivante :

1) $I=\int_0^{\pi}x\sin xdx$ 2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

3) $K=\int_1^e\ln xdx$

Solution :1) $I=\int_0^{\pi}x\sin xdx$

On pose : $u'(x)=\sin x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=-\cos x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\pi]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\pi]$

Donc : $I=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos xdx=[-x\cos x]_0^{\pi}-[-\sin x]_0^{\pi}=\pi$

2) $J=\int_0^{\ln 2}xe^xdx$

On pose : $u'(x)=e^x$ et $v(x)=x$

Donc $u(x)=e^x$ et $v'(x)=1$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[0;\ln 2]$ et u' et v' sont continue sur $[0;\ln 2]$

Donc : $J=\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}1e^xdx=\ln 2e^{\ln 2}-\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$J=2\ln 2-\left(e^{\ln 2}-1\right)=2\ln 2-(2-1)=2\ln 2-1$

3) $K=\int_1^e\ln xdx$ on a $K=\int_1^e\ln xdx=\int_1^e 1\times\ln xdx$

On pose : $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$

Donc : $u(x)=x$ et $v'(x)=1/x$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[1;e]$ et u' et v' sont continue sur $[1;e]$

Donc : $K=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx=e\ln e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$K=e-\int_1^e 1dx=e-[x]_1^e=e-e+1=1$

Exercice14 : En utilisant une intégration par partie calculer :

1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ 2) $J=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

3) $K=\int_0^1 x\sqrt{e^x}dx$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin xdx$

5) $M=\int_1^e(x\ln x)dx$ 6) $N=\int_1^e\cos(\ln x)dx$

Solution :1) $I=\int_0^1 xe^{2x}dx$ la démarche est la même : $I=\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx$

$I=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$

$I=\int_1^{e^3}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}\ln xdx$

$=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}3x^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}dx=\left[3x^{\frac{1}{3}}\ln x\right]_1^{e^3}-3\int_1^{e^3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$$= \left[3x^{\frac{1}{3}} \ln x \right]_1^{e^3} - 9\left[x^{\frac{1}{3}} \right]_1^{e^3} = 9$$

Exercice15 : En utilisant une intégration par partie calculer : $J = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

$K = \int_0^1 \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

$M = \int_1^e x(1-\ln x)dx \qquad N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

$R = \int_1^e x \ln x dx \qquad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$

Exercice16: On pose : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{x+3}dx$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x+3}dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat, montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \le I_n \le \frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice17 : En utilisant une intégration par changement de variable.
Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

Solution : 1) $I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x = \sqrt{t}$

On a : $x = \sqrt{t}$ donc : $\begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = 1 \\ t = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \end{cases}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$I_1 = \int_1^3 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(1+x^2)x}dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}dt$

$I_1 = \left[2\arctan x\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\arctan\sqrt{3} - 2\arctan 1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

2) $I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t = e^x$

On a : $t = e^x$ donc : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

$\frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ on en déduit que : $\frac{dt}{t} = dx$

$I_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_1^2 \frac{t^3+t^2+3t}{1+t^2}\frac{dt}{t}$

$I_2 = \int_1^2 \frac{t^2+t+3}{1+t^2}dt = \int_1^2 \left(t + \frac{3}{1+t^2}\right)dt$

$I_2 = \left[\frac{1}{2}t^2 + 3\arctan x\right]_1^2$ (Continuer les calculs)

3) $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$

On a $I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{(\ln t)'}{\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x = \ln t$

$x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

On a : $x = \ln t$ donc : $\begin{cases} t = e^{-2} \Rightarrow x = -2 \\ t = e \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$I_3 = \int_{e^{-2}}^{e} \frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt = \int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{3+x}}dx$

On sait que: $x \to 2\sqrt{3+x}$ est une primitive de :

$x \to \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ donc : $I_3 = \left[2\sqrt{3+x}\right]_{-2}^{1}$ donc : $I_3 = 2$

4) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$ on pose $x = \frac{\pi}{4} - t$

On trouve :

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) - dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt$$

On sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t} = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$

Donc : $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right) = \frac{2}{1+\tan t}$

Donc : $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2 - \ln(1+\tan t)\right) dt$

Donc: $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln(1+\tan t)\right) dt$

$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dt - I_4$ Donc:

$$2I_4 = \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt \Rightarrow 2I_4 = \frac{\pi}{4}\ln 2 \Rightarrow I_4 = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

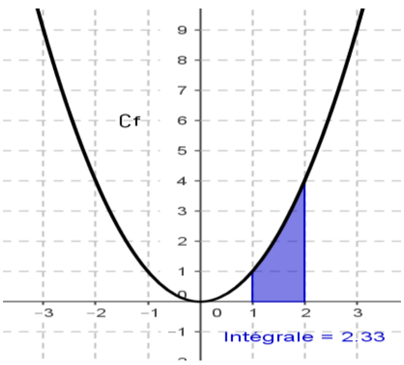
Exercice18 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et Soit f définit par : $f(x) = x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x = 1$ et $x = 2$

Solution :1)



2) f est continue et positif sur $[1;3]$ on a donc :

$A = \int_1^2 |f(x)|dx = \int_1^2 |x^2|dx = \int_1^2 x^2 dx$

$A = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times 1^3 = \frac{7}{3}\times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3}c^2m$

Exercice19 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 3cm$

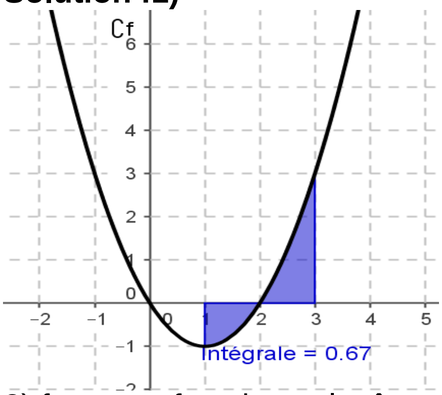
Soit f définit par : $f(x) = x^2 - 2x$

1)tracer Cf la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x = 1$ et $x = 3$

Solution :1)



2) f est une fonction polynôme donc continue sur

$[1;3]$ donc : $A = \int_1^3 |f(x)|dx = \int_1^3 |x^2 - 2x|dx$

Etudions le signe de : $x^2 - 2x$ dans $[1;3]$

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x2-2x$		+	0	−	0	+	

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x|dx = \int_1^2 |x^2 - 2x|dx + \int_2^3 |x^2 - 2x|dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3}\times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3}\times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3}\times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3}\times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2 \times 2cm \times 3cm = 12c^2m$$

Exercice20 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\| = 2cm$ et soit f définit par : $f(x) = 1 - e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x = \ln 2$ et $x = \ln 4$

Solution : il suffit de calculer : $I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|f(x)\right|dx$

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|f(x)\right|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|1-e^{x}\right|dx$$

On sait que : $\ln 2\le x\le \ln 4$ donc : $e^{\ln 2}\le e^{x}\le e^{\ln 4}$

Donc : $2\le e^{x}\le 4$ donc $e^{x}>1$ par suite: $1-e^{x}<0$

Donc:

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left|1-e^{x}\right|dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}-\left(1-e^{x}\right)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\left(e^{x}-1\right)dx$$

$$I=\left[e^{x}-x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}=\left(e^{\ln 4}-\ln 4\right)-\left(e^{\ln 2}-\ln 2\right)$$

$$I=\left(4-2\ln 2\right)-\left(2-\ln 2\right)=4-2\ln 2-2+\ln 2=2-\ln 2$$

Donc : $A=\left(2-\ln 2\right)\times 2cm\times 2cm=4\left(2-\ln 2\right)c^{2}m$

Exercice21 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$$f(x)=\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x} \text{ et } g(x)=e^{-x}$$

calculer en cm^{2} S la surface du domaine limité par : $\left(C_{f}\right)$; $\left(C_{g}\right)$ et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Solution : il suffit de calculer :

$$I=\int_{1}^{e}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

$$I=\int_{0}^{\ln 2}\left|\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}+e^{-x}-e^{-x}\right|dx=\int_{0}^{\ln 2}\left|\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}\right|dx=\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx$$

Car : $\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}>0$

Donc: $I=\int_{0}^{\ln 2}\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}dx=2\int_{0}^{\ln 2}\frac{\left(e^{x}+1\right)'}{e^{x}+1}dx=\left[2\ln\left|e^{x}+1\right|\right]_{0}^{\ln 2}$

Donc :

$$I=2\ln\left|e^{\ln 2}+1\right|-2\ln\left|e^{0}+1\right|=2\ln 3-2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$$

Donc : $A=2\ln\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=8\ln\frac{3}{2}c^{2}m$

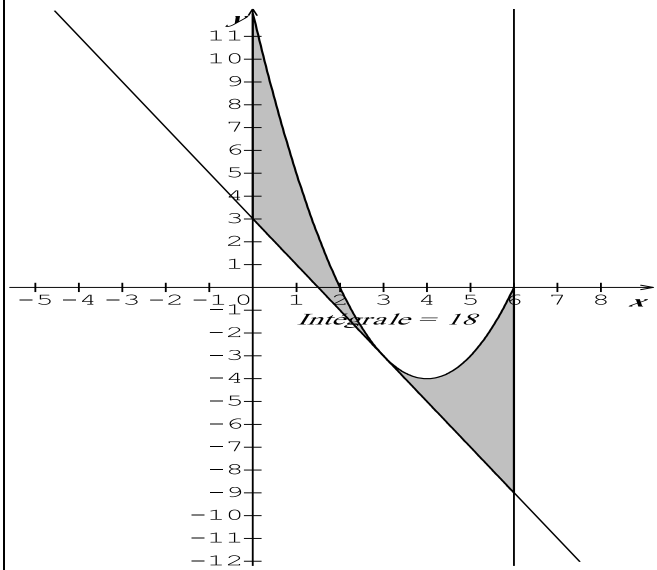
Exercice22 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^{2}-8x+12$ et (D) la tangente à la courbe $\left(C_{f}\right)$ au point $A\left(3;f(3)\right)$

Calculer A la surface du domaine limité par : $\left(C_{f}\right)$ et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe $\left(C_{f}\right)$ au point $A\left(3;f(3)\right)$ est : $y=f(3)+f'(3)(x-3)$

$f'(x)=2x-8$ et $f'(3)=-2$ et $f(3)=-3$

$(D):y=-2x+3$



il suffit de calculer :

$$I=\int_{0}^{6}\left|f(x)-y\right|dx=\int_{0}^{6}\left(x^{2}-6x+9\right)dx=\int_{0}^{6}\left(x+3\right)'\left(x+3\right)^{2}dx$$

$$I=\left[\frac{\left(x+3\right)^{3}}{3}\right]_{0}^{6}=18 \text{ donc :}$$

$$A=18\times\left(0.5cm\right)^{2}=4.5cm^{2}$$

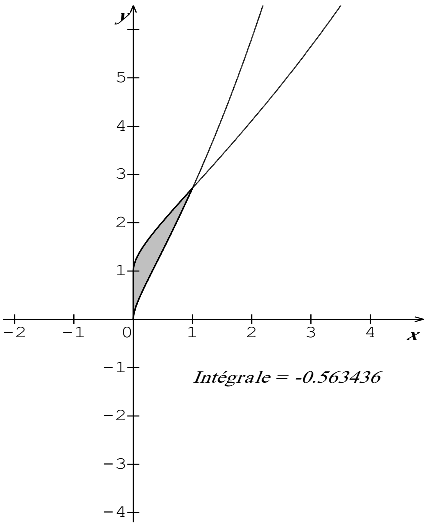
Exercice 23: $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par : C_{f} et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice24 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : $\left(C_{f}\right)$; $\left(C_{g}\right)$ et les droites $x=0$ et $x=1$

Solution :



$S = \int_0^1 \left| f(x) - g(x) \right| dx$ Ua

$S = \int_0^1 \left| e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \right| dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \left| 1 - \sqrt{x} \right| dx$

On sait que : $0 \le x \le 1$ donc : $0 \le \sqrt{x} \le 1$ donc :

$0 \le 1 - \sqrt{x}$ donc : $S == \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \left(1 - \sqrt{x} \right) dx$

On utilisant deux intégration l'une par changement de variable et l'autre par partie on trouve :

$$S == \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \left(1 - \sqrt{x} \right) dx = \left[\left(6\left(\sqrt{x} - 1 \right) - 2x \right) e^{\sqrt{x}} \right]_0^1$$

$S = 6 - 2e$ Ua

Exercice25 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x + x + 1}{e^x + 1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droites: $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice26 : $\left(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \right)$ orthonormé avec $\left\| \vec{i} \right\| = 2cm$

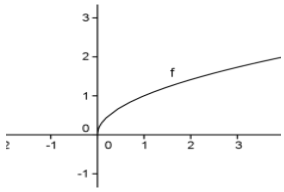
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Solution : La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$ engendre un solide :

$$I = \int_0^4 \pi \left(f(x) \right)^2 dx = \int_0^4 \pi \left(\sqrt{x} \right)^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

$I = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$ et on a :



$u.v = \left\| \vec{i} \right\| \left\| \vec{j} \right\| \left\| \vec{k} \right\| = 8cm^3$

Donc le volume est : $V = 8\pi \times 8cm^3 = 64\pi cm^3$

Exercice27 : $\left(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \right)$ orthonormé avec $\left\| \vec{i} \right\| = \frac{2}{3} cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1 \right)}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[0;1]$

Solution : on calcul : $\int_0^1 x\left(e^x - 1 \right) dx$

$$I = \int_0^1 \pi \left(f(x) \right)^2 dx = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{x\left(e^x - 1 \right)} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 x\left(e^x - 1 \right) dx$$

On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x) = e^x - 1$ et $v(x) = x$

Donc : $u(x) = e^x - x$ et $v'(x) = 1$

Donc : $\int_0^1 x\left(e^x - 1 \right) dx = \left[x\left(e^x - x \right) \right]_0^1 - \int_0^1 1\left(e^x - x \right) dx$

$$\int_0^1 x\left(e^x - 1 \right) dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x\left(e^x - 1 \right) dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Donc : $I = \frac{1}{2}\pi$ par suite :

$$V = \frac{1}{2}\pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m$$

Exercice28: $\left(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k} \right)$ orthonormé avec $\left\| \vec{i} \right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\ln x}$

et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice29: $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

Soit la fonction f définit par :

$f(x) = x\sqrt{1-lnx}$ et (C) la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $[1;e]$

Exercice30: En utilisant les somme de Riemann calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

Solution : Pour cet exemple il faut faire apparaitre les bornes (a et b) puis l'expression de la fonction f:

Si on factorise par n à l'intérieur de la somme on aura :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

et d'après cette expression on conclut que :

$a=0$ et $a=1$ et $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

On aura : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= [ar\tan x]_0^1 = ar\tan 1 - ar\tan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice31:

En utilisant les somme de Riemann calculer :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Solution : 1)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $f(x)=\frac{1}{x}$ et puisque f est continue sur $[1;2]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \int_1^2\frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

2) On pose (changement d'indice)

$j = k - n$ on obtient : $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$

$(n + k = n + j + n = 2n + j)$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=0$ et $b=1$ et $f(x)=\frac{1}{2+x}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k} = \int_0^1\frac{1}{2+x}dx$

$$= [\ln(2+x)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} = \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Exercices 32 :

1) Calculer les limites des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$$

2) a) Calculer en utilisant une intégration par partie : $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$

b) En déduire la limite de la suite :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$$

(Introduire ln dans l'expression de u_n)

Exercice33: Déterminer la fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e.

Solution : La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est $F(x) = \int_e^x \ln t dt$ On va procéder par une I.P.P

on a $[e;x]$ On pose : $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$

Donc : $u(t) = t$ et $v'(t) = 1/t$

On a u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[e;x]$ et u' et v' sont continue sur $[e;x]$

Donc :

$$F(x) = \int_e^x \ln t dt = [t\ln t]_e^x - \int_e^x t\times\frac{1}{t}dt = x\ln x - e - \int_1^e 1dt$$

$$F(x) = x\ln x - e - [t]_e^x = x\ln x - e - x + e = x\ln x - x$$

La fonction primitive de la fonction lnx qui s'annule en e est : $F(x) = x\ln x - x$

Exercice34: étudier la dérivabilité de la fonction F définit par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

Solution : est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $x \to \frac{1}{x}$ et $x \mapsto lnx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction f: $t \to e^{-t^2}$ est Continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f.

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt = \left[\varphi(t)\right]_{\frac{1}{x}}^{\ln x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $F'(x) = (\varphi o v)'(x) - (\varphi o u)'(x)$

$= v'(x) \times \varphi'(v(x)) - u'(x) \times \varphi'(u(x))$

$= v'(x) \times f(v(x)) - u'(x) \times f(u(x))$

$$= (\ln x)' e^{-(\ln x)^2} - \left(\frac{1}{x}\right)' e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$F'(x) = \frac{1}{x}e^{-(\ln x)^2} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Exercice35: soit la fonction F définit par :

$F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t}dt$ $\forall x \in [-1;+\infty[$

1) Étudier la dérivabilité de la fonction F et calculer $F'(x)$ $\forall x \in [-1;+\infty[$

2) calculer $F(x)$ sans intégrale

Solution :

la fonction $x \to \sqrt{1+x}$ est continue sur $[-1;+\infty[$ et la fonction: $v: x \to x^2+2x$ est est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(\mathbb{R}) = [-1;+\infty[$

donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$F'(x) = v'(x) f(v(x)) = 2(x+1)|x+1|$

2) $F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t}dt = \int_0^{x^2+2x} (1+t)'(1+t)^{\frac{1}{2}}dt$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{x^2+2x} = \left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^{x^2+2x}$$

$$F(x) = \frac{2}{3}(x+1)^2|x+1|$$

Exercice36: étudier les variations de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\left(t^2-4\right)dt$

Solution : la fonction: $t \to e^{t^2}\left(t^2-4\right)$ est Continue sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$

$F'(x) = e^{x^2}\left(x^2-4\right)$ le signe de $F'(x)$ est le signe de x^2-4 donc :

a)Sur $[2;+\infty[$ et $]-\infty;-2]$ F est croissante

b)Sur $[-2;2]$ F est décroissante

Exercice37: soit h la fonction définie sur :

$\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $h(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ si $x\neq 0$

et $h(0)=e^2$

1)Montrer que h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et en déduire que :

$H:x\to\int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)calculer : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt$

Solution :1) $h(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$

$\lim\limits_{x\to 0}h(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$

On a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+2x)=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{\ln(1+2x)}{2x}=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=e^2=h(0)$ donc h est Continue

Et puisque h est la composée de fonction sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ continues

alors h est Continue sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $H:x\to\int_0^x h(t)dt$ est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

2)on a: $H'(x)=h(x)-h(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x h(t)dt=H'(0)=e^2$

Exercice38: Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$

par $(\forall t\in]0,+\infty[)$ $(f(t)=e^{\frac{1}{\ln t}}$

1) Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$.
2) Considérons la fonction définie sur $]1,+\infty[$

par : $F(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$

a) Montrer que $(\forall x\in]1,+\infty[)$:

$(f(x+1)\le F(x)\le f(x))$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

3) a) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)(e^t\ge t+1)$

b) En déduire que : $(\forall x>1)$: $\ln$

$F(x)-1\ge\int_x^{x+1}\frac{1}{\ln t}dt$

4)a) Montrer que : $(\forall t\in]0,+\infty[)(\ln t\le t-1)$

b) En déduire que $(\forall x>1)(F(x)-1\ge\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$

5) Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$
et calculer $F'(x)$ pour $x>1$
6) Dresser le tableau de variation de la Fonction F
7) Construire la courbe CF.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien