Cours et exercices d'applications et de réflexions _sur_ les Lois de composition interne

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Structures algébriques(partie1)

Lois de composition interne

I) Lois de composition interne

1)Introduction :

a)L'opération + sur $\mathbb{R}$ est une application f qui, à deux reéls (x, y) en associe un troisième z (la somme)qui est aussi un réel : $f(x;y)=x+y=z$

on a donc : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ (x;y)\mapsto f(x;y)=x+y \end{array}$

on dit L'opération + est une lois de composition interne sur $\mathbb{R}$

b) L'opération **-** sur $\mathbb{N}$ n'est une lois de composition interne sur $\mathbb{N}$ car par exemple : $2\in\mathbb{N}$ et $3\in\mathbb{N}$ mais : $2-3\notin\mathbb{N}$

2)Définition : Soit E un ensemble non vide. Une loi de composition interne sur E (ou encore une opération dans E) est une application f de E × E dans E.

$$\begin{array}{l} f:E\times E\to E \\ (x;y)\mapsto f(x;y) \end{array}$$

3)notations : l'élément : $f(x;y)$ dans E s'appelle la composée de x et y dans l'ordre par cette lois de composition interne f et on le note : $x*y$ ou xTy ou $x\perp y$ ou $x\vee y$ ...

au lieu de : $f(x;y)$

4)Autre exemples d'ensembles et lois de compositions internes :

On connait les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; $\mathbb{C}$

1) • Dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'addition et la multiplication sont des lois de composition interne on écrit : $(\mathbb{N};+)$; $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$ $(\mathbb{R};+)$ $(\mathbb{C};+)$; $(\mathbb{N};\times)$; $(\mathbb{Z};\times)$; $(\mathbb{Q};\times)$ $(\mathbb{R};\times)$ $(\mathbb{C};\times)$

• Dans $\mathbb{N}$, la soustraction n'est pas une loi interne, mais elle l'est dans $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z};-)$

• La division dans $\mathbb{R}$ n'est pas une loi interne mais la division dans $\mathbb{R}^*$ l'est. on a : $(\mathbb{R}^*;\div)$

• Dans $\mathbb{N}^*$, l'exponentiation, c'est-à-dire l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^* \\ (x;y)\mapsto x^y \end{array}$, le PGCD ou le PPCM sont des lois internes :

on a donc : $(\mathbb{N}^*;f)$; $(\mathbb{N}^*;\wedge)$; $(\mathbb{N}^*;\vee)$

• E étant un ensemble donné ; $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E on a : $X\in\mathcal{P}(E)\Leftrightarrow X\subset E$

$x\in X\cap Y\Leftrightarrow x\in X$ et $x\in Y$ $x\in X\cup Y\Leftrightarrow x\in X$ ou $x\in Y$

$x\in\bar{X}\Leftrightarrow x\notin X$ $x\in X-Y\Leftrightarrow x\in X$ et $x\notin Y$

$x\in X\Delta Y\Leftrightarrow x\in X-Y$ ou $x\in Y-X$

, l'intersection et la réunion et la différence symétrique et le complémentaire sont des lois de composition interne dans $\mathcal{P}(E)$ donc : $(\mathcal{P}(E);\cup)$; $(\mathcal{P}(E);\cap)$; $(\mathcal{P}(E);\Delta)$; $(\mathcal{P}(E);^c)$

• l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};...;\overline{n-1}\}$ sont définies par:

$$\forall(\bar{x};\bar{y}) \in \left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^2 \begin{cases} \bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y} \\ \bar{x}\times\bar{y}=\overline{x\times y} \end{cases}$$

l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ sont des lois de composition interne dans on écrit :

$\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}};+\right)$; $\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}};\times\right)$

• l'ensemble des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n se note : $\mathbb{R}_n[X]$

la somme et la multiplication de deux polynômes P et Q sont définies par:

∀x ∈ $\mathbb{R}$, (P + Q)(x) =P(x) + Q(x).

∀x ∈ $\mathbb{R}$, (P × Q)(x) = P(x) × Q(x).

La somme et le produit de deux polynômes de degrés inferieur a n est un polynômes de degrés inferieur a n. Donc, + et × sont des lois de compositions internes sur $\mathbb{R}_n[X]$

on écrit : $(\mathbb{R}_n[X];+)$; $(\mathbb{R}_n[X];\times)$

• Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonction de I dans $\mathbb{R}$

Se note : $F(I;\mathbb{R}) = \begin{Bmatrix} f: I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{Bmatrix}$

la somme et la multiplication de deux applications f et g de I dans $\mathbb{R}$ sont définies par: ∀x ∈ I, (f + g)(x) = f(x) + g(x).

∀x ∈ I, (f × g)(x) = f(x) × g(x).

La somme de deux applications de I dans $\mathbb{R}$ est une application de I dans $\mathbb{R}$. Donc, + et × sont des lois de compositions internes sur $F(I;\mathbb{R})$

on écrit : $(F(I;\mathbb{R});+)$; $(F(I;\mathbb{R});\times)$

• Si E est un ensemble non vide

Dans $F(E;E)$ est l'ensemble des fonctions de E dans E on définit la relation $\circ$ par :

∀x ∈ E, (f ∘ g)(x) = f(g(x))

$\circ$ est une loi interne dans $F(E;E)$ on écrit :

$(F(E;E);\circ)$

• l'ensemble des translations On le note : T_r

la composition de deux translations est une translation donc : $\circ$ est une loi interne dans T_r

on écrit : $(T_r;\circ)$

• L'ensemble des homothéties de même centre O on le note : H_O et on a la composition de deux homothéties de centre O est une homothétie de centre O donc : $\circ$ est une loi interne dans H_O on écrit : $(H_O;\circ)$

•L'ensemble des rotations de même centre O on le note : R_O et on a la composition de deux rotations de centre O est une rotation de centre O donc : $\circ$ est une loi interne dans R_O

on écrit : $(R_O;\circ)$

• tout application bijective du plan P dans P on l'appelle une transformation du plan

L'ensemble des transformations du plan on le note : T on a :

$$\forall(f;g)\in\mathrm{T} \quad \forall M \in P \quad (f\circ g)(M) = f(g(M))$$

Donc : la composition de deux transformations est une transformation.

donc : $\circ$ est une loi interne dans T

on écrit : $(\mathrm{T};\circ)$

•L'ensemble des vecteurs du plan on le note : V_2 et on a la somme de deux vecteurs est un vecteur donc : $+$ est une loi de composition interne dans V_2 on écrit : $(V_2;+)$

• le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un scalaire donc : $\bullet$ n'est pas une loi de composition interne dans V_2

5)Applications :

Exemple1 :1)montrer on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\}$ que l'addition et la multiplication sont des lois de compositions internes

Solution :

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+\right)$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

on utulisant les tableaux de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on remarque bien que ce sont des lois de compositions internes

Exemple2 : on définit sur l'ensemble $]-1;1[$ la relation T tel que : $xTy = \dfrac{x+y}{1+xy}$;

$\forall (x;y) \in]-1;1[^2$

Monter que T est une loi de composition interne Dans $]-1;1[$

Solution : soit $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$

Montrons que : $xTy = \dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$?

Calculons : $1-\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{(1+xy)^2} = \frac{x^2y^2+2xy+1-x^2-y^2-2xy}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1-x^2-y^2(1-x^2)}{(1+xy)^2}$$

$$1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2 = \frac{1-x^2-y^2+x^2y^2}{(1+xy)^2} = \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1+xy)^2}$$

Or $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$ donc : $|x| \prec 1$ et $|y| \prec 1$

donc : $x^2 \prec 1$ et $y^2 \prec 1$ on a donc : $1-\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2 \succ 0$

donc : $\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2 \prec 1$ donc : $\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2} \prec \sqrt{1}$

donc : $\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right| \prec 1$ donc : $-1 \prec \dfrac{x+y}{1+xy} \prec 1$

donc : $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1;1[$ cqfd

6) les matrices :

6-1) matrice carrée d'ordre 2

a)Définition1 :

1)Une matrice carrée d'ordre 2
à coefficients réels est un tableau de quatre nombres (Il n'y a pas de séparation verticale ou horizontale, contrairement aux tableaux)

2)l'ensemble des matrices carrées d'ordre2

On le note :

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / (a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

La somme et la multiplication et l'égalité de deux matrices A et B dans $M_2(\mathbb{R})$ sont définies par:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

La somme et le produit de deux matrices sont des lois de compositions internes dans $M_2(\mathbb{R})$

on écrit : $(M_2(\mathbb{R});+)$; $(M_2(\mathbb{R});\times)$

L'égalité est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \end{cases}$$

b)Cas particulier :

1)la matrice : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice unitaire

Et on a : $A \times I_2 = A \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

2)la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice nulle

Et on a : $A + 0 = A \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

6-2) matrice carrée d'ordre 3

a)Définition :

1)Une matrice carrée d'ordre 3
à coefficients réels est un tableau de 9 nombres
2) l'ensemble des matrices carrées d'ordre3
On le note :

$$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} / (a;b;c;d;f;g;h;i) \in \mathbb{R}^9 \right\}$$

La somme et la multiplication de deux matrices A et B dans $M_3(\mathbb{R})$ sont définies par:

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & g+g' \\ b+b' & e+e' & h+h' \\ c+c' & f+f' & i+i' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & d'' & g'' \\ b'' & e'' & h'' \\ c'' & f'' & i'' \end{pmatrix}$$

Avec : $a'' = aa' + db' + gc' \qquad d'' = ad' + de' + gf'$

$b'' = ba' + eb' + hc' \qquad e'' = bd' + ee' + hf'$

$c'' = ca' + fb' + ic' \qquad f'' = cd' + fe' + if'$

$g'' = ag' + dh' + gi' \qquad h'' = bg' + eh' + hi'$

$i'' = cg' + fh' + ii'$ La somme et le produit de deux matrices sont des lois de compositions internes dans $M_3(\mathbb{R})$ on écrit : $(M_3(\mathbb{R});+)$; $(M_3(\mathbb{R});\times)$

L'égalité est définie par :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \\ d = d' \\ e = e' \\ f = f' \\ g = g' \\ h = h' \\ i = i' \end{cases}$$

b)Cas particulier :

1)la matrice : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice unitaire et on a : $A \times I_3 = A \quad \forall A \in M_3(\mathbb{R})$

2)la matrice : $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice nulle et on a : $A + 0 = A \quad \forall A \in M_3(\mathbb{R})$

Exercice1 : on considére la matrice suivante :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calculer A^2 et A^3

et en déduire $A^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

solution :

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons par recurrence que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\times 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$ vraie si n=1

b)supposons que : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c)montrons que : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

II) parties stables pour une Lois de composition interne :

1)définition1 : Soient $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne

Soit F une partie non vide de E.

F est stable pour $*$ $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in F^2, x * y \in F$.

2) Exemples :

a) l'ensemble : $S = \{-1;1\}$ est une partie stable de $(\mathbb{R};\times)$ mais il n'est pas stable dans $(\mathbb{R};+)$

Car : $-1 \in S$ et $1 \in S$ mais $-1+1=0 \notin S$

b)Dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pairs est stable pour l'addition (la somme de deux nombres pairs est un nombre pair)ou pour la multiplication (le produit de deux nombres pairs est un nombre pair) alors que l'ensemble des nombres impairs est stable pour la multiplication (le produit de deux nombres impairs est un nombre impair) mais n'est pas stable pour l'addition(la somme de deux nombres impairs n'est pas toujours un nombre impair).

2) Dans $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .l'ensemble des injections, l'ensemble des surjections et l'ensemble des bijections et l'ensemble des applications affines sont stables pour $\circ$ (la composée de deux injections (resp. deux surjections, deux bijections, deux affines) est une injection (resp. une surjection, une bijection, affines)).

l'ensemble des symetries axials n'est pas une partie stable dans $(\mathrm{T};\circ)$ (car la composée de deux symetries axials d'axes paralleles est une translation et non une symetrie axial

Exercice2 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x * y = xy - 3x - 3y + 12$; $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ et soit : $S =]3;+\infty[$

Monter que S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

Solution : soit $x \in S$ et $y \in S$

Montrons que : $x * y \in S$?

$x * y - 3 = xy - 3x - 3y + 9 = x(y-3) - 3(y-3)$

$x * y - 3 = (y-3)(x-3)$

or $x \in S =]3;+\infty[\Leftrightarrow x \succ 3$ et $y \in]3;+\infty[\Leftrightarrow y \succ 3$

donc : $x * y - 3 \succ 0$ donc : $x * y \in]3;+\infty[= S$ cqfd

donc : S est une partie stable pour $(\mathbb{R};*)$

3) définition2 : si $(E;*)$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie stable dans $(E;*)$ alors $*$ est une lois de composition interne dans F et on l'appelle la lois induite sur F

III) Propriétés des lois de composition interne

Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E. $*$ peut avoir ou non une ou plusieurs des propriétés suivantes :

1) Commutativité :

Définition1 : $*$ est commutative $\Leftrightarrow \forall(x, y) \in E^2$ $x * y = y * x$.

2) Associativité

Définition 2 : $*$ est associative $\Leftrightarrow \forall(x, y, z) \in E^3$ $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Si $*$ est associative, les expressions $(x * y) * z$ et $x * (y * z)$ peuvent se noter tout simplement : $x * y * z$.

Exemples :1) L'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont commutatives et associatives

mais la soustration n'est ni commutatives ni associatives en effet : $2-3\neq 3-2$ et $2-(3-1)\neq(2-3)-1$

2) L'addition et la multiplication dans $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ sont commutatives et associatives

3) L'addition dans V_2 et V_3 est commutative et associative

4) La loi $\circ$ dans $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$ est associative mais non commutative (en général ($f\circ g\neq g\circ f$).

Ex : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=2 \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto g(x)=x+2 \end{array}$

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$: $(f\circ g)(x)=2$ et $(g\circ f)(x)=4$

On a : $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h) = f\circ g\circ h$

$\forall(f;g;h)\in(F(\mathbb{R};\mathbb{R}))^3$

5) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=2x+3y-1$

a) $2*3=2\times2+3\times3-1=12$

$3*2=2\times3+3\times2-1=11$

On a : $2*3\neq3*2$

Donc :la loi $*$ est non commutative

b) $(1*1)*1=(2\times1+3\times1-1)*1=4*1=10$

$1*(1*1)=1*4=4*1=13$

On a : $1*(1*1)=(1*1)*1$

Donc :la loi $*$ est non associative

6) l'intersection et la réunion sont des lois commutatives et associatives dans $P(E)$

7) la loi $\circ$ dans : $(T_r;\circ)$; $(H_O;\circ)$; $(R_O;\circ)$

Est commutative et associative

5)le produit vectoriel dans V_3 n'est pas commutative : ($\vec{i}\wedge\vec{j}=-\vec{j}\wedge\vec{i}$)

6) le produit dans $M_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutative :

Ex : $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5\\0&4\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\5&9\end{pmatrix}$$

Donc on a : $A\times B\neq B\times A$

Remarque : si la loi est commutative et associative et on utilusant une notation additive ou multiplicative on a les écritures suivantes : $n\in\mathbb{N}$

1)Notation additive

a) $a+b=b+a$ b) $(a+b)+c=b+(a+c)$

c) $\underbrace{a+a+...+a}_{nfois}=na$ d) $na+ma=(n+m)a$

2)Notation multiplicative

a) $a\times b=b\times a$ b) $(a\times b)\times c=b\times(a\times c)$

c) $\underbrace{a\times a\times...\times a}_{nfois}=a^n$ d) $a^n\times a^m=a^{n+m}$

Exercice3 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=a+b-3ab$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Monter que $*$ est commutative et associative

2) on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définit par : $(a;b)\mathrm{T}(x;y)=(ax;ay+b)$; $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Monter que T est ni commutative et ni associative dans $\mathbb{R}^2$

Solution:1) Soit : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b=a+b-3ab=b+a-3ba=b*a$

Donc : $*$ est commutative

b)

$(a*b)*c=(a+b-3ab)*c=a+b-3ab+c-3(a+b-3ab)c$

$(a*b)*c=a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

et on a :

$a*(b*c)=a*(b+c-3bc)=a+(b+c-3bc)-3a(b+c-3bc)$

$a*(b*c)=a+b+c-3(ab+ac+bc)+9abc$

Donc : $(a*b)*c=a*(b*c)$

Donc : $*$ est associative

2)a)on a : $(1;3)\mathrm{T}(2;0)=(1\times2;1\times0+3)=(2;3)$

$(2;0)\mathrm{T}(1;3)=(2\times1;2\times3+0)=(2;6)$

Donc : $(1;3)\mathrm{T}(2;0)\neq(2;0)\mathrm{T}(1;3)$ donc : T n'est pas commutative

b)

$((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7)=(2;6)\mathrm{T}(5;7)=(2\times5;2\times7+6)=(10;20)$

$(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))=(1;3)\mathrm{T}(2\times5;2\times7+0)=(1;3)\mathrm{T}(10;14)$

$(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))=(1\times10;1\times14+3)=(10;17)$

Donc : $((1;3)\mathrm{T}(2;0))\mathrm{T}(5;7)\neq(1;3)\mathrm{T}((2;0)\mathrm{T}(5;7))$

donc : T n'est pas associative

3) Elément neutre

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E.
(E ; $*$) admet un élément neutre si et seulement si :
$\exists e\in E\ \forall x\in E,\ e*x=x*e=x$.
On dit aussi que e est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E.

⇨ Commentaire .

◊ Notez bien l'ordre des quantificateurs :
$\exists e\in E/\ \forall x\in E$, ... qui dit que e est précis et ne dépend pas de x, et non pas $\forall x\in E,\ \exists e\in E/$...
qui permettrait à e de changer quand x change.
◊ Si on sait que la loi $*$ est commutative, une et une seule des deux égalités ($\forall x\in E,\ x*e=x$ ou $\forall x\in E,\ e*x=x$) ci-dessus suffit.

Théorème : Si $*$ admet un élément neutre dans E. celui-ci est unique.
Démonstration : Soient e et e′
deux éléments neutres (pas nécessairement distincts). Alors e = e $*$ e′= e′

Exemples:

1)1 est l'élément neutre dans les ensembles :

$(\mathbb{N};\times)$; $(\mathbb{Z};\times)$; $(\mathbb{Q};\times)$ $(\mathbb{R};\times)$;$(\mathbb{C};\times)$

Et 0 est l'élément neutre dans les ensembles :

$(\mathbb{N};+)$; $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$;$(\mathbb{R};+)$;$(\mathbb{C};+)$

2)le vecteur nul $\vec{0}$ est l'élément neutre dans les ensembles : $(V_2;+)$; $(V_3;+)$

2)la fonction nulle $\theta:x\to0$ est l'élément neutre dans l'ensemble : $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$

2)la fonction nulle $I_d:x\to x$ est l'élément neutre dans l'ensemble : $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$

2) E est l'élément neutre dans: $(\mathrm{P}(E);\cap)$

$\varnothing$ est l'élément neutre dans: $(\mathrm{P}(E);\cup)$ et$(\mathrm{P}(E);\Delta)$

3)a) la matrice : $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ la matrice unitaire

est l'élément neutre dans: $(M_2(\mathbb{R});\times)$

la matrice : $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ nulle est l'élément neutre

dans: $(M_2(\mathbb{R});+)$

b) la matrice : $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ la matrice unitaire

est l'élément neutre dans: $(M_3(\mathbb{R});\times)$

la matrice : $0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ nulle est l'élément

neutre dans: $(M_3(\mathbb{R});+)$

5)dans : $(\mathbb{R};-)$ il n'ya pas d'éléments neutres

4)Elément symétrisable

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E possédant un élément neutre e.
soit x ∈ E. ;x admet un symétrique à gauche pour $*$
⇔ ∃x′ ∈ E/ x′ $*$ x = e.
x admet un symétrique à droite pour $*$
⇔ ∃x′ ∈ E/ x $*$ x′= e.
x admet un symétrique pour $*$
⇔ ∃x′ ∈ E/ x $*$ x′= x′ $*$ x = e.
x est symétrisable à gauche pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique à gauche pour $*$.
x est symétrisable à droite pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique à droite pour $*$.
x est symétrisable pour $*$ si et seulement si x admet un symétrique pour $*$.

⇨ **Commentaire :**

⋄ Notez que ici, on fournit x′ après avoir fourni x (soit x ∈ E...∃x′ ∈ E...) et donc bien sûr, x′ varie quand x varie.
⋄ Si on sait que la loi $*$ est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Remarques et exemples:

1)Dans : $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$;$(\mathbb{R};+)$;$(\mathbb{C};+)$ tout element a admet un symétrique et s'appelle l'opposé on le note $-a$

2) a)Dans : $(\mathbb{Q}^*;\times)$;$(\mathbb{R}^*;\times)$;$(\mathbb{C}^*;\times)$ tout element a admet un symétrique et s'appelle l'inverse on le note $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}
(Ainsi, l'égalité $i^2 = -1$ qui s'écrit encore i × (−i) = 1 qui signifier que i et −i sont inverses l'un de l'autre

b) Dans : $(\mathbb{C};\times)$ l' element 0 n'admet pas de symétriques

3) Dans : $(V_2;+)$; $(V_3;+)$ tout vecteur $\vec{u}$ admet un symétrique et s'appelle l'opposé on le note $-\vec{u}$

4) Dans : $(\mathrm{P}(E);\Delta)$ tout partie A de E different de E n'admet pas de symétriques

5) Dans : $(\mathrm{P}(E);\cup)$ une partie A de E admet un symétrique c'est lui-même : (car $A\Delta A=\varnothing$)

6)a) Dans : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$ tout element $\neq \bar{0}$ admet un symétrique

b)Dans : $\left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z};\times\right)$ l' element $\bar{2}$ n'admet pas de symétriques

7) Dans : $(M_2(\mathbb{R});+)$ tout matrice $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ admet un symétriques c'est la matrice : $-A=\begin{pmatrix}-a&-c\\-b&-d\end{pmatrix}$

7) Dans : $(M_2(\mathbb{R});\times)$ la matrice $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ n'admet pas de symétriques

8) Dans : $(T_r;\circ)$ (ensemble translations) tout translation $t_{\vec{v}}$ admet un symétrique : $(t_{\vec{v}})^{-1}$

Et on a : $(t_{\vec{v}})^{-1}=t_{-\vec{v}}$

9) Dans : $(R_0;\circ)$ (ensemble rotations) tout rotation $r(O;\alpha)$ admet un symétrique : $(r(O;\alpha))^{-1}$

Et on a : $(r(O;\alpha))^{-1} = r(O;-\alpha)$

10)Si $*$ est la composition des applications de E dans E .les applications de E dans E qui admettent un symétrique pour la loi $\circ$ sont les bijections de E sur E. Le symétrique d'une bijection f pour la loi $\circ$ n'est autre que sa réciproque f^{-1}

Théorème : Soit x un élément de E.
Si $*$ est associative, possède un élément neutre e et si x admet un symétrique pour $*$, celui-ci est unique.

Démonstration : Soit x un élément de E.
Soient x′et x″ deux éléments symétriques de x (pas nécessairement distincts).
Alors, $x'' = e * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$

Théorème : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi de composition interne sur E, associative et possédant unélément neutre e.
Soient x et y deux éléments de E. Si x et y sont symétrisables et x′et y′ leurs symétriques respectifs. alors $x * y$ est symétrisable et $(x * y)' = y' * x'$

Démonstration : Soient x et y deux éléments symétrisables de E. Soient x′et y′leurs symétriques respectifs. On a : $(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x'$
$= x * e * x' = x * x' = e$
$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e.$
Donc, $x * y$ est symétrisable et son symétrique est $y' * x'$

5)Elément régulier (simplifiable)

Définition : Soient E un ensemble non vide et $*$ une loi interne sur E. Soit $x \in E$
a)x est régulier à gauche pour $*$
$\Leftrightarrow \forall (y, z) \in E^2, x * y = x * z \Rightarrow y = z.$
b)x est simplifiable à droite pour $*$
$\Leftrightarrow \forall (y, z) \in E^2, y * x = z * x \Rightarrow y = z.$
c) x est régulier si et seulement si x est régulier à gauche et à droite.

Théorème : Si $*$ est associative et possède un élément neutre e, tout élément symétrisable est simplifiable.

Démonstration : Soit x un élément de E, symétrisable pour $*$.
Soit x′ son symétrique pour $*$. Pour $(y, z) \in E^2$
$x * y = x * z \Rightarrow x' * (x * y) = x' * (x * z)$
$\Rightarrow (x' * x) * y = (x' * x) * z \Rightarrow e * y = e * z \Rightarrow y = z.$

exemples :1)Dans : $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$;$(\mathbb{R};+)$;

$(\mathbb{C};+)$ tout element a est regulier

Cad : $\forall (y, z) \in \mathbb{C}^2$, $a + x = a + y \Rightarrow x = y.$

2) Dans : $(\mathbb{N}^*;\times);(\mathbb{Z}^*;\times)$; $(\mathbb{Q}^*;\times);(\mathbb{R}^*;\times)$;

$(\mathbb{C}^*;\times)$ tout element a est regulier

Exercice4 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b = ab-(a+b)+2$;

$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative

2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner les élements symétrisables

Solution:1) Soit : $\forall (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$

a) On a : $a*b = ab-(a+b)+2 = ba-(b+a)+2 = b*a$

Donc : $*$ est commutative

2)a) $\forall a \in \mathbb{R}$: $2*a = 2a-(2+a)+2 = a$ et

$a*2 = 2a-(a+2)+2 = a$

Donc 2 est l'élément neutre pour la loi $*$
b)soit $a \in \mathbb{R}$ on cherche $a' \in \mathbb{R}$ tel que :
$a*a' = 2$ ($*$ est commutative) ?

$a*a' = 2 \Leftrightarrow aa'-(a+a')+2 = 2 \Leftrightarrow a'(a-1) = a$

Si : $a = 1$ alors : $0 = 1 \Leftrightarrow a*a' = 2$ donc impossible

Si : $a \neq 1$ alors : $a' = \frac{a}{a-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a*a' = 2$

Donc : $\forall a \in \mathbb{R}-\{1\}$ il admet un symétrique

$a' = \frac{a}{a-1}$

Théorème :(inverse d'une matrice)

Soit $A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice

Le nombre : $\Delta = ad - bc$ s'appel :déterminant de La matrice A

Si : $\Delta \neq 0$ alors La matrice A est inversible et

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{\Delta} & -\dfrac{c}{\Delta} \\ -\dfrac{b}{\Delta} & \dfrac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Preuve : on montre que : $AA^{-1}=A^{-1}A=I_2$

Exercice5 : on considére les matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2-2A+I_2=0$ et en déduire que La matrice A est inversible et déterminer A^{-1}

2) calculer : B^2 et B^3 et en déduire que La matrice B n'admet pas d'inverse

Solution

1) on a : $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $-2A+I_2=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

donc : $A^2-2A+I_2=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$

$A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow A(A-2I_2)=-I_2 \Leftrightarrow A(2I_2-A)=I_2$

Et $A^2-2A+I_2=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (2I_2-A)A=I_2$

Donc : A est inversible et déterminer $A^{-1}=2I_2-A$

$$A^{-1}=2I_2-A=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3=B\times B^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $B^3=0_3$

On suppose que B admet un inverse donc il existe une matrice C tel que : $BC=CB=I_3$

Donc : $BC=I_3 \Rightarrow B^2BC=B^2I_3 \Rightarrow 0_3\times C=B^2$

$\Rightarrow 0_3=B^2$ or $B^2\neq 0_3$ contradiction

Donc : B n'admet pas d'inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice6 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{Z}^2 \text{et } a^2\text{-2b}^2=1\right\}$$

Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

Solution : soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(x;y)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$ et $a^2\text{-2b}^2=1$

Et : $M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$ et $x^2\text{-2y}^2=1$

Montrons que : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$?

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & y\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} & x \end{pmatrix}$$

$$M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}=\begin{pmatrix} ax+2by & (ay+bx)\sqrt{2} \\ (ay+bx)\sqrt{2} & ax+2by \end{pmatrix}$$

Donc : $\boldsymbol{M}_{(a;b)}\times\boldsymbol{M}_{(x;y)}=\boldsymbol{M}_{(ax+2by;ay+bx)}$

$(ax+2by;ay+bx)\in\mathbb{Z}^2$

Car $(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ et $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

Et on a :

$(ax+2by)^2-2(ay+bx)^2=(a^2x^2+4b^2y^2+4abxy)$

$-2(a^2y^2+b^2x^2+2abxy)=(a^2x^2-2a^2y^2)-2(2b^2y^2-b^2x^2)$

$=a^2(x^2-2y^2)-2b^2(x^2-2y^2)=(x^2-2y^2)(a^2-2b^2)=1\times1=1$

donc : $M_{(a;b)}\times M_{(x;y)}\in E$

donc : E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

IV homomorphisme ou morphisme

« Le mot morphisme signifie à peut prés ou respecte la forme »

Définition : Soient (E, $*$) et (F, T) deux ensembles munis de lois de compositions internes

Une application f de E dans F est un morphisme de (E, $*$) dans (F, T) lorsque :

$\forall(x;y)\in E^2,\ f(x*y)=f(x)\mathrm{T}f(y)$

•t si f est bijective on dit que f est un isomorphisme

• Si E = F et $*$ = T, on parle d'endomorphisme.

• Si f est un endomorphisme bijectif, on parle d'automorphisme.

Exemples :

Exemple1 : soit l'application : $\begin{aligned}f:(\mathbb{Z};+)&\to(\mathbb{Z}^*;\times)\\x&\mapsto 5^x\end{aligned}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$, +) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Solution : $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$

$f(x+y)=5^{x+y}=5^x\times5^y=f(x)\times f(y)$ donc : f est un morphisme de ($\mathbb{Z}$,+) dans ($\mathbb{Z}^*$, $\times$)

Exemple2 : soit l'application : $\begin{aligned}g:]0;+\infty[&\to\mathbb{R}\\x&\mapsto\ln x\end{aligned}$

montrons que g est un morphisme de : ($]0;+\infty[$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, +)

Solution : $\forall(x;y)\in]0;+\infty[^2$

$g(x\times y)=\ln(x\times y)=\ln(x)+\ln(y)=g(x)+g(y)$

donc : g est un morphisme de ($]0;+\infty[$, $\times$) dans ($\mathbb{R}$, +)

Exemple3 : soit l'application : $\begin{aligned}h:\mathbb{C}&\to\mathbb{R}\\z&\mapsto|z|\end{aligned}$

montrons que h est un morphisme de : ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Solution : $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$h(z\times z')=|z\times z'|=|z|\times|z'|=h(z)\times h(z')$ donc : f est un morphisme de ($\mathbb{C}$, $\times$)dans ($\mathbb{R}$, $\times$)

Exemple4 : soit l'application :

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$

$\theta\mapsto e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

montrons que k est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$) **Solution :** $\forall(\theta;\theta')\in\mathbb{R}^2$

$k(\theta+\theta')=e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta+i\theta'}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=k(\theta)\times k(\theta')$

donc : k est un morphisme de ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($\mathbb{C}^*$, $\times$)

Exemple5: soit l'application : $\begin{aligned}l:\mathbb{R}&\to M_2(\mathbb{R})\\x&\mapsto\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$

montrons que l est un morphisme de : ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$) **Solution :** $\forall(x;x')\in\mathbb{R}^2$

on a : $l(x+x')=\begin{pmatrix}1&x+x'\\0&1\end{pmatrix}$

$l(x)\times l(x')=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&x'\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x+x'\\0&1\end{pmatrix}$

Donc : $l(x+x')=l(x)\times l(x')$

donc : k est un morphisme de ($\mathbb{R}$, $+$) dans ($M_2(\mathbb{R})$, $\times$)

Exemple6 : soit f l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ n\mapsto \overline{2^n} \end{array}$

montrons que f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$)

dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Solution : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}^2$

$f(n+m)=\overline{2^{n+m}}=\overline{2^n\times 2^m}=\overline{2^n}\times\overline{2^m}=f(n)\times f(m)$

donc : f est un morphisme de ($\mathbb{N}$, $+$)

dans ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\times$)

Exemple7 : on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition

interne suivante : $(a;b)+(a';b')=(a+a';b+b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

Soit $A(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines :

$A(\mathbb{R};\mathbb{R})=\left\{ f_{(a;b)} / \forall x\in\mathbb{R} : f_{(a;b)}(x)=ax+b\right\}$

Soit l'application : φ : $\begin{array}{l} \varphi:\mathbb{R}^2\to A(\mathbb{R};\mathbb{R}) \\ (a;b)\mapsto f_{(a;b)} \end{array}$

donc : φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$)

dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Solution:1) Soit : $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

On a :

$\varphi((a;b)+(a';b'))=\varphi(a+a';b+b')=f_{(a+a';b+b')}$

$f_{(a+a';b+b')}(x)=(a+a')x+(b+b')=(ax+b)+(a'x+b')$

Donc : $\varphi((a;b)+(a';b'))=\varphi(a;b)+\varphi(a';b')$

donc : φ est un morphisme de ($\mathbb{R}^2$, $+$)

dans ($A(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $+$)

Théorème : soit f un homomorphisme de (E, $*$) dans (F, T) alors :

1) $f(E)$ est une partie stable dans (F, T)

2)si $*$ est commutative dans (E, $*$) alors T est commutative dans ($f(E)$, T)

3)si $*$ est associative dans (E, $*$) alors T est associative dans ($f(E)$, T)

4)si $*$ est admet un élément neutre e dans (E, $*$) alors $f(e)$ est un élément neutre dans ($f(E)$, T)

5) si $*$ est admet un élément neutre e dans (E, $*$) Et si x est admet un symétrique x' dans (E, $*$) alors $y=f(x)$ admet un symétrique dans ($f(E)$, T) c'est $y'=f(x')$ cad : $(f(x))'=f(x')$

Preuve :1) soient : $y_1\in f(E)$ et $y_2\in f(E)$

Donc : $\exists x_1\in E / f(x_1)=y_1$ et $\exists x_2\in E / f(x_2)=y_2$

$y_1\mathrm{T}y_2=f(x_1)\mathrm{T}f(x_2)=f(x_1*x_2)\in f(E)$

Car : $x_1*x_2\in E$ et effet : $*$ la loi de composition interne dans E

2) soient : $y_1\in f(E)$ et $y_2\in f(E)$

Donc : $\exists(x_1;x_2)\in E^2 / f(x_1)=y_1 et f(x_2)=y_2$

$y_1\mathrm{T}y_2=f(x_1)\mathrm{T}f(x_2)=f(x_1*x_2)$

Car f un homomorphisme

$=f(x_2*x_1)$

Car $*$ est commutative dans (E, $*$)

$=f(x_2)\mathrm{T}f(x_1)$ Car f un homomorphisme

$=y_2\mathrm{T}y_1$ Cqfd

3) soient : $y_1\in f(E)$ et $y_2\in f(E)$ et $y_3\in f(E)$

Donc:

$\exists(x_1;x_2;x_3)\in E^3 / f(x_1)=y_1 et f(x_2)=y_2 et f(x_3)=y_3$

$(y_1 \mathrm{T} y_2)\mathrm{T} y_3=(f(x_1)\mathrm{T} f(x_2))\mathrm{T} f(x_3)= f(x_1 * x_2)\mathrm{T} f(x_3)$

Car f un homomorphisme

$= f((x_1 * x_2)* x_3)= f(x_1 *(x_2 * x_3))$

Car $*$ est associative dans (E, $*$) et f un homomorphisme

$= f(x_1)\mathrm{T} f(x_2 * x_3)= f(x_1)\mathrm{T}(f(x_2)\mathrm{T} f(x_3))$

$= y_1\mathrm{T}(y_2\mathrm{T} y_3)$ Cqfd

4) soie: $y\in f(E)$ donc : Donc : $\exists x\in E / f(x)=y$

On pose : $f(e)=e'$ donc : $e'\in f(E)$ car $e\in E$

$y\mathrm{T} e'= f(x)\mathrm{T} f(e)= f(x*e)= f(x)= y$

Car f un homomorphisme et e élément neutre dans (E, $*$)

De même on montre que : $e'\mathrm{T} y = y$

Donc: $f(e)$ est un élément neutre dans ($f(E)$, T)

5) soit : x' le symétrique de x dans (E, $*$)
On a donc : $x*x'=e$ et $x'*x=e$

Donc : $f(x*x')= f(e)$ et $f(x'*x)= f(e)$

puisque f un homomorphisme on a donc :

$y\mathrm{T} f(x')= f(e)$ et $f(x')\mathrm{T} y = f(e)$

On a $f(e)$ élément neutre de $(f(E);\mathrm{T})$

Donc $f(x')$ est le symétrique dans ($f(E)$, T)

De $f(x)=y$ cqfd

Exercice7 :soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

On pose : $a*b=(a-2)(b-2)+2$

1)montrer que $*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2)soit l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ vers I

tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

a) montrer que f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)
b) en déduire que $*$ est associative et admet un élément neutre a determiner

solution :1) soient $a\in]2;+\infty[$ et $b\in]2;+\infty[$

$a\in]2;+\infty[\Rightarrow a \succ 2$ et $b\in]2;+\infty[\Rightarrow b\succ 2$

Donc : $(a-2)(b-2)\succ 0$

Donc : $(a-2)(b-2)+2\succ 2$

Donc : $a*b\in]2;+\infty[= I$

Donc :$*$ est une loi de composition interne Dans $I=]2;+\infty[$

2) soient $x\in\mathbb{R}^{*+}$ et $y\in\mathbb{R}^{*+}$

$f(x\times y)=\dfrac{2xy+1}{xy}$

$f(x)* f(y)=\dfrac{2x+1}{x}*\dfrac{2y+1}{y}=\left(\dfrac{2x+1}{x}-2\right)\left(\dfrac{2y+1}{y}-2\right)+2$

$=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{y}+2=\dfrac{2xy+1}{xy}$

Donc : $f(x\times y)= f(x)* f(y)\ \forall(x;y)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$

Donc : f est un morphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)

b)puisque $\times$ est commutative dans ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$)et f

un homomorphisme de ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$) dans (I , $*$)

alors $*$ est commutative dans I
et on a 1 est l'élément neutre dans ($\mathbb{R}^{*+}$, $\times$)
alors : $f(1)=3$ est l'élément neutre dans I

Exercice8 :on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ 1) Monter que $*$ est commutative
2) Monter que $*$ n'est pas associative
3) est ce que la loi $*$ admet un élement neutre ?
4)resoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
a) $2*x=5$ b) $x*x=1$

Solution:1) Soit : soit :$(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $a*b=ab+(a^2-1)(b^2-1)=ba+(b^2-1)(a^2-1)$

car la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative

Donc :$a*b=b*a$ par suite $*$ est commutative

2) on a : $(-1*0)*2=0*2=-3$

Et $-1*(0*2)=-1*-3=3$

Donc : $(-1*0)*2\neq-1*(0*2)$

Donc : $*$ n'est pas associative
4)on a : $a*1=1*a=a \quad \forall a\in\mathbb{R}$
Donc : 1 est l'élément neutre pour la loi $*$
(l'élement neutre est unique)
4) a)on va resudre l'équation : $2*x=5$

$$2*x=5\Leftrightarrow 2x+3(x^2-1)=5\Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0$$

$\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=\frac{4}{3}$ donc : $S=\left\{-2;\frac{4}{3}\right\}$

b)on va resudre l'équation : $x*x=1$

$$x*x=1\Leftrightarrow x^2+(x^2-1)^2=1\Leftrightarrow x^4-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1$$

donc : $S=\{-1;0;1\}$

Exercice9 :on muni $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne suivante : $(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')$;

$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$

1) Monter que $*$ est commutative et associative
2) Monter que $*$ admet un élement neutre et determiner dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables Pour la loi $*$
3)soit : $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

a)montrer que S est une partie stable de($\mathbb{R}^2$,$*$)

b) Monter que (S ,$*$) admet un élement neutre et comparer les les élements neutres de ($\mathbb{R}^2$,$*$) et de (S ,$*$)

Solution:1) a) Montrons que $*$ est commutative ?
Soit : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(a';b')\in\mathbb{R}^2$

$$(a;b)*(a';b')=(a\times a';b\times b')=(a'\times a;b'\times b)=(a';b')*(a;b)$$

Donc :$*$ est commutative

b) Montrons que $*$ est associative?

Soit: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ et $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ et$(a'';b'')\in\mathbb{R}^2$

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a\times a';b\times b')*(a'';b'')$$

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a\times a'\times a'';b\times b'\times b'')$$

On aussi : $(a;b)*((a';b')*(a'';b''))=(a;b)*(a'\times a'';b'\times b'')$

$$(a;b)*((a';b')*(a'';b''))=(a\times a'\times a'';b\times b'\times b'')$$

Donc :

$$((a;b)*(a';b'))*(a'';b'')=(a;b)*((a';b')*(a'';b''))$$

Donc : $*$ est associative
2)a) Montrons que $*$ admet un élement neutre

Soit: $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

On a : $(a;b)*(1;1)=(a;b) \quad \forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

Et puisque :$*$ est commutative

Alors : $*$ admet un élement neutre c'est $(1;1)$

b) determinons dans $\mathbb{R}^2$ les élements symétrisables pour la loi $*$

soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ on cherche $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$(a;b)*(a';b')=(1;1)$

$(a;b)*(a';b')=(1;1)\Leftrightarrow(a\times a';b\times b')=(1;1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b\times b'=1\\a\times a'=1\end{cases}$ si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ alors $\begin{cases}a'=1/a\\b'=1/b\end{cases}$

Donc les élements dans $\mathbb{R}^2$ symétrisablesPour la loi $*$ sont les couples $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ tel que: $a\neq 0$ et $b\neq 0$

Et le symétrique de $(a;b)$ est $\left(1/a;1/b\right)$ pour $*$

3)a) $S=\mathbb{R}\times\{0\}$

Soit : $(a;0)\in S$ et $(b;0)\in S$

$(a;0)*(b;0)=(ab;0)\in S$

Donc : S est une partie stable de($\mathbb{R}^2$,$*$)

b) soit : $(a;0)\in S$

on a : $(a;0)*(1;0)=(a;0)$ et $(1;0)*(a;0)=(a;0)$

donc : $(1;0)$ est élément neutre pour (S ,$*$)

et on a $(1;1)$ est élément neutre pour($\mathbb{R}^2$,$*$)

et : $(1;1)\neq(1;0)$

Exercice10 :on muni $\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T suivante : $zTz'=z\overline{z'}$; $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

$\forall(a';b')\in\mathbb{R}^2$ (F, T) $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

1) étudier la commutativité et l'associativité de T

2)résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

Solution :

1) la commutativité de T ?

On a : $1Ti=1\overline{i}=-i$ et $iT1=i\overline{1}=i$

Donc : $1Ti\neq iT1$ donc T non commutative

L'associativité de T ?

$(iT1)Ti=iTi=i\cdot(-i)=1$

$iT(1Ti)=iT-i=i\cdot i=-1$

Donc : $(iT1)Ti\neq iT(1Ti)$ donc T non associative

2)résolution dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(zTz)Tz=i$

$(zTz)Tz=i\Leftrightarrow(z\overline{z})Tz=i\Leftrightarrow z\overline{z}\overline{z}=i\Leftrightarrow|z|^2\overline{z}=i$

On pose : $z=x+iy$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow(x^2+y^2)(x-iy)=i$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow(x^2+y^2)x-iy(x^2+y^2)=i$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+y^2)x=0\\y(x^2+y^2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\,ou\,x=0\\y(x^2+y^2)=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=0\\0=-1\end{cases}ou\begin{cases}x=0\\y^3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

$|z|^2\overline{z}=i\Leftrightarrow z=-i$ donc : $S=\{-i\}$

Exercice11 :on muni $I=]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ suivante :

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}\quad\forall(x;y)\in I^2$

soit f l'application définie sur I vers I

tel que : $f(x)=x^2\quad\forall x\in I$

1) montrer que : $f(x*y)=f(x)+f(y)$

2)a) montrer que $*$ est associative

b) est ce que $*$ admet un élément neutre

3)soit $a\in I$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\quad n\in\mathbb{N}^*$

Solution : soit $(x;y)\in I^2$

1) $f(x*y)=(x*y)^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2$

$=f(x)+f(y)$ Cqfd

2) $f(x*y)=f(x)+f(y)$

Donc f est un homomorphisme et puisque

f est une bijection donc f est un isomorphismes

De $(I;*)$ dans $(I;+)$ donc : $(I;*)$ et $(I;+)$

Ont la même structures et puisque + est associative dans I alors $*$est aussi associative

Et puisque $(I;+)$ n'admet pas d'élément neutre

alors : $(I;*)$ n'admet pas d'élément neutre

3) $f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)+f(a)+....+f(a)}_{nfois}$

$f(A)=nf(a)=na^2$

Et puisque f est un isomorphismes de $(I;*)$

dans $(I;+)$ donc : $A=f^{-1}(na^2)$

Et puisque : $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ donc / $A=\sqrt{na^2}=\sqrt{n}a$

Exercice12 :1) on muni $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $*$ définit par : $x*y=x+y-xy$;$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

tel que : $f(x)=1-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

1) montrer que f est un homomorphisme bijectif

De $(\mathbb{R};*)$ dans $(\mathbb{R};\times)$

2)en déduire que $*$ est associative et que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera

3) determiner l'ensemble des élements symétrisables pour la loi $*$

4)soit $a\in\mathbb{R}$ calculer : $A=\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}$ $n\in\mathbb{N}^*$

Solution : 1) $f(x)=1-x$

$f(x)=y\Leftrightarrow 1-x=y\Leftrightarrow x=1-y$

Donc : $f^{-1}(x)=1-x=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f^{-1}=f$

$f(x*y)=1-x*y=1-(x+y-xy)$

$=(1-x)(1-y)=f(x)\times f(y)$

Donc : f est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$

dans $(\mathbb{R};\times)$

2) puisque f est un isomorphismes de $(\mathbb{R};*)$

dans $(\mathbb{R};\times)$ alors : $(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};\times)$

Ont la même structure et puisque $\times$ est associative dans $\mathbb{R}$ alors $*$ est aussi associative dans $\mathbb{R}$ et puisque 1 est élément neutre dans $(\mathbb{R};\times)$ alors $f^{-1}(1)=f(1)=0$ est élément neutre

dans $(\mathbb{R};*)$

3)on a 0 est élément neutre unique qui n'admet

pas de symétrique dans $(\mathbb{R};\times)$ et on a $f(0)=1$

Donc : l'ensemble des élements symétrisables

pour $(\mathbb{R};*)$est $\mathbb{R}-\{1\}$

4) $f(A)=f\left(\underbrace{a*a*....*a}_{nfois}\right)=\underbrace{f(a)\times f(a)\times....\times f(a)}_{nfois}$

$f(A)=(f(a))^n=(1-a)^n$

Donc : $A=f^{-1}\left((1-a)^n\right)=f\left((1-a)^n\right)=1-(1-a)^n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Cours et **exercices d'applications et de réflexions sur Structures algébriques**

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Structures algébriques(partie2)

Groupe anneau corps

I) Groupes .

1) Définition : Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne (notée $*$).

(G, $*$) est un groupe si et seulement si

1) $*$ est associative,

2) $*$ possède un élément neutre dans G

3) tout élément de G possède un symétrique pour $*$ dans G.

Si de plus, $*$ est commutative, le groupe (G, $*$) est dit commutatif ou abélien.

2) Exemples

1) • $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$; $(\mathbb{R};+)$; $(\mathbb{C};+)$; $(\mathbb{Q}^*;\times)$; $(\mathbb{R}^*;\times)$; $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont des groupes commutatifs

• $(\mathbb{C};\times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{C}$ (pour ×).

• $(\mathbb{Z};\times)$ et $(\mathbb{N};+)$ ne sont pas des groupes car 2 n'a pas de symétrique

• $(V_2;+)$ et $(V_3;+)$ sont deux groupes commutatifs

• $(\mathcal{P}(E);\cap)$ n'est pas un groupe car une partie $A\neq E$ n'admet pas de symétrique

• $(\mathcal{P}(E);\cup)$ n'est pas un groupe car une partie $A\neq\varnothing$ n'admet pas de symétrique

• $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$; $(\mathbb{R}_n[X];+)$ sont des groupes commutatifs

• $(M_2(\mathbb{R});+)$ et $(M_3(\mathbb{R});+)$ sont des groupes non commutatifs

Ex : $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5\\0&4\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}0&2\\3&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\5&9\end{pmatrix}$$

Donc on a : $A\times B\neq B\times A$

• L'ensemble des translations $(T_r;\circ)$ et l'ensemble des rotations de même centre O $(R_O;\circ)$ sont des groupes commutatifs

L'ensemble des transformations du plan : $(\mathrm{T};\circ)$ est un groupe

Remarque : soit : $(G;*)$ un groupe

1) on utilisant une notation additive on dit que : $(G;+)$ un groupe additif

a) $(a+b)+c=b+(a+c)$

b) on note 0 l'élément neutre

c)le symétrique de a appelé opposé de a on le note $-a$ dans ce cas on pose : $a+a=2a$

et $\underbrace{a+a+...+a}_{nfois}=na$ avec la convention :

$\begin{cases}0a=0\\1a=a\\n(-a)=-na\end{cases}$ Et on vérifie alors les relations suivantes : $na+ma=(n+m)a$ et

$n\times(ma)=(n\times m)a=nma \quad \forall(n;m)\in\mathbb{Z}^2$

2) on utilusant une notation multiplicative on dit que : $(G;\times)$ un groupe multiplicative

a) $(a\times b)\times c=b\times(a\times c)$

b) on note 1 l'élément neutre

c)le symétrique de a on le note a^{-1}(l'inverse)

d) ce cas on pose : $a\times a=a^2$ et $\underbrace{a\times a\times ...\times a}_{nfois}=a^n$

avec la convention : $\begin{cases} a^0=1 \\ a^1=a \\ a^{-n}\left(a^{-1}\right)^n \end{cases}$ Et on vérifie

alors les relations suivantes : $a^n\times a^m=a^{n+m}$ et

$\left(a^n\right)^m=a^{n\times m}\quad \forall(n;m)\in\mathbb{Z}^2$

$(a\times b)^n=a^n\times b^n$ si le groupe est commutatif

$(a\times b)^n\neq a^n\times b^n$ si le groupe est non commutatif

(Dans le pratique on pourra supprimer le symbole $\times$ ou on le remplaçant par un point)

Exemple :on pose $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\forall(x;y)\in I^2$

On muni I de la loi de composition définie par :

$x*y=ar\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)$

Montrer que $(I;*)$ est un groupe commutatif

Solution :1)soit $(x;y)\in I^2$

$x*y=arc\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)=arc\tan\left(-1+\tan y+\tan x\right)$

Donc $x*y=y*x$ et par suite $*$ est commutatif

2)soit $(x;y;y)\in I^3$

$(x*y)*z=\left(arc\tan\left(-1+\tan x+\tan y\right)\right)*z$

$=arc\tan\left(-1+\tan((arc\tan(-1+\tan x+\tan y))+\tan z)\right)$

$=arc\tan(-1+\left(-1+\tan x+\tan y\right)+\tan z))$

$=arc\tan(-2++\tan x+\tan y+\tan z)$

Et on a :

$x*(y*z)=x*\left(ar\tan\left(-1+\tan y+\tan z\right)\right)$

$=ar\tan\left(-1+\tan x+\tan((arc\tan(-1+\tan y+\tan z))))\right)$

$=arc\tan(-1+\tan x+\left(-1+\tan y+\tan z\right))$

$=arc\tan(-2++\tan x+\tan y+\tan z)$

Donc : $(x*y)*z=x*(y*z)$

par suite $*$ est associative

3) $\forall x\in I$ on a :

$x*\frac{\pi}{4}=arc\tan\left(-1+\tan x+\tan\frac{\pi}{4}\right)=arc\tan\left(-1+\tan x+1\right)$

$x*\frac{\pi}{4}=arc\tan\left(\tan x\right)=x$

Et puisque $*$ est commutatif on a aussi : $\frac{\pi}{4}*x=x$

Et puisque : $\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

alors : $*$ possède un élément neutre $e=\frac{\pi}{4}$

4) soit : $x\in I$ on cherche $x'\in I$ tel que :

$x*x'=\frac{\pi}{4}$?

$x*x'=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow arc\tan\left(-1+\tan x+\tan x'\right)=\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -1+\tan x+\tan x'=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \tan x+\tan x'=2$

$\Leftrightarrow \tan x'=2-\tan x\Leftrightarrow x'=\arctan\left(2-\tan x\right)\in I$

Donc : tout élément de I possède un symétrique pour $*$ dans I.

Finalement :$(I;*)$ est un groupe commutatif

Exercice 1: on muni $\mathbb{R}^2$ d'une loi de composition interne T définit par :

$(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x})$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et

$\forall(x';y')\in\mathbb{R}^2$

Monter que $(\mathbb{R}^2;\mathrm{T})$ groupe non commutative

Solution:a)soient $(x;y)$; $(x';y')$ et $(x'';y'')$ des éléments de $\mathbb{R}^2$

$((x;y)\mathrm{T}(x';y'))\mathrm{T}(x'';y'')=(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x})\mathrm{T}(x'';y'')$

$=(x+x'+x'';(ye^{x'}+y'e^{-x})e^{x''}+y''e^{-(x+x')})$

$=(x+x'+x'';ye^{-(x'+x'')}+y'e^{-x+x''}+y''e^{-(x+x')})$

$(x;y)\mathrm{T}((x';y')\mathrm{T}(x'';y''))=(x;y)\mathrm{T}(x'+x'';y'e^{x''}+y''e^{-x'})$

$=(x+x'+x'';(y'e^{x''}+y''e^{-x'})e^{-x}+ye^{x'+x''})$

$=(x+x'+x'';y'e^{(x''-x)}+y''e^{-(x+x')}+ye^{x'+x''})$

Donc :

$((x;y)\mathrm{T}(x';y'))\mathrm{T}(x'';y'')=(x;y)\mathrm{T}((x';y')\mathrm{T}(x'';y''))$

donc : T est associative

b) l'élément neutre de T ?

$(e_1;e_2)$ l'élément neutre de T ssi $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$(x;y)\mathrm{T}(e_1;e_2)=(x;y)$ et $(e_1;e_2)\mathrm{T}(x;y)=(x;y)$

$(x;y)\mathrm{T}(e_1;e_2)=(x;y)\Leftrightarrow(x+e_1;ye^{e_1}+e_2e^{-x})=(x;y)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+e_1=x\\ ye^{e_1}+e_2e^{-x}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\ e_2e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=0\\ e_2=0\end{cases}$

Et on a : $(0;0)\mathrm{T}(x;y)=(x;y)$

Donc : $(0;0)$ est l'élément neutre de T

c) le symétrique d'un élément dans T ?

soient $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ montrons l'existence de

$(x';y')\in\mathbb{R}^2$ tel que : $(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(0;0)$ et

$(x';y')\mathrm{T}(x;y)=(0;0)$

$(x;y)\mathrm{T}(x';y')=(0;0)\Leftrightarrow(x+x';ye^{x'}+y'e^{-x})=(0;0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+x'=0\\ ye^{x'}+y'e^{-x}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ (y+y')e^{-x}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ y+y'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$

On a aussi : $(-x;-y)\mathrm{T}(x;y)=(0;0)$

Donc : $(-x;-y)$ est le symétrique de élément $(x;y)$ dans T

Donc : $(\mathbb{R}^2;\mathrm{T})$ est un groupe

Et puisque : $(1;1)\mathrm{T}(1;0)=(2;e)$ et $(1;0)\mathrm{T}(1;1)=(2;e^{-1})$

Alors : $(1;1)\mathrm{T}(1;0)\neq(1;0)\mathrm{T}(1;1)$

donc : T n'est pas commutative

3) propriété des groupes

Théorème :soit $(G;*)$ est un groupe

1) l' élément neutre dans G est unique
2) tout élément de G possède un symétrique unique dans G.

Si x' est le symétrique de x et y' est le symétrique de y alors le symétrique de $x*y$ est $y'*x'$:

Cad : $(x*y)'=y'*x'$

3) tout élément de G est regulier cad :

$\forall a\in G$ et $\forall(x;y)\in G^2$

$a*x=a*y\Rightarrow x=y$ et $x*a=y*a\Rightarrow x=y$

Preuve :1) et 2) voir la leçon précédente

3)soient : $a\in G$ et $(x;y)\in G^2$

$x*a=y*a\Rightarrow(x*a)*a'=(y*a)*a'$

Avec a' est le symétrique de a

$\Rightarrow x*(a*a')=y*(a*a')$ Car $*$ est associative

$\Rightarrow x*e=y*e$ Car $*$ possède un élément neutre e

$\Rightarrow x=y$ De même on montre l'autre implication

Exemple1 :soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et tel que : $(a;b)\in G^2$ $(ab)^2=a^2b^2$ Montrer que que ce groupe est commutatif

Solution :par hypothèse on a quels que soient les éléments $(a;b)\in G^2$: $abab=aabb$

Mais dans un groupe tout élément étant régulier on peut simplifier à gauche par a et à droite par b

Donc : $abab=aabb$

Donc $ba=ab$ et par suite ce groupe est commutatif

Proposition :si $(G;*)$ est un groupe qui admet un élément neutre e et $(a;b)\in G^2$ et a' est le symétrique de a alors :les équations : $(E_1): a*x=b$ et $(E_2): x*a=b$ admettent une solution unique :

•Pour (E_1) la solution est : $x=a'*b$

•Pour (E_2) la solution est : $x=b*a'$

Exemple2:(étude d'un groupe fini)

$\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};+\right)$ et $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}-\{\overline{0}\};\times\right)$ sont deux groupes commutatifs :

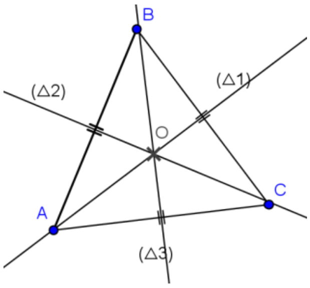
+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};+\right)$ et Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}};\times\right)$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Exemple3 :(étude d'un groupe fini)

(ABC) un triangle équilatéral



(Δ_1)la médiatrice du segment $[BC]$

(Δ_2) la médiatrice du segment $[AB]$

(Δ_3)la médiatrice du segment $[AC]$

Soit ζ l'ensemble des transformations suivantes : $\zeta=\{r_1;r_2;r_3;s_1;s_2;s_3\}$

r_1 la rotation de centre O et d'angle 0 : $r_1(O;0)$

r_2 la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: $r_2\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$

r_3 la rotation de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$: $r_3\left(O;\frac{4\pi}{3}\right)$

s_1 la symétrie axial d'axe : (Δ_1)

s_2 la symétrie axial d'axe : (Δ_2)

s_3 la symétrie axial d'axe : (Δ_3)

Donc : on utilisant la loi de composition des transformation $\circ$ on trouve le tableau suivant :

$\circ$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	r_1	s_3	s_1	s_2
r_3	r_3	r_1	r_2	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3
s_2	s_2	s_3	s_1	r_3	r_1	r_2
s_3	s_3	s_1	s_2	r_2	r_3	r_1

Remarque : si $(G;*)$ est un groupe fini alors chaque élément de G se trouve sur le tableau une fois dans chaque ligne et dans chaque colonne

Exercice 2: soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et e l'élément neutre de G

1) Montrer que si: $\forall(a;b)\in G^2$: $(a.b)^2=a^2.b^2$ alors le groupe G est commutatif

2)Montrer que si: $\forall x\in G$: $x^2=e$ alors le groupe G est commutatif

Solution : 1) soit $(a;b)\in G^2$

par hypothèse on a: $(a.b)^2=a^2.b^2$

donc : $a.b.a.b=a.a.b.b$ puisque G un groupe tout élément de G est regulier

Donc : $b.a=a.b$

Par suite ce groupe est commutatif

2) soient les éléments $(x;y)\in G^2$

par hypothèse on a: $xyxy=e$

on multipliant à gauche par x et à droite par y

Donc : $xxyxyy=xey\Rightarrow x^2yxy^2=xey\Rightarrow eyxe=xy$

$\Rightarrow yx=xy$ Par suite ce groupe est commutatif

3) Sous-groupes

Définition : Soient (G, $*$) un groupe et H une partie stable pour (G, $*$)
H est un sous-groupe de (G, $*$) si et seulement si (H, $*$) est un groupe

Remarque :si e est l'élément neutre de G
{e} et G sont des sous-groupes de (G, $*$) appelés sous-groupes triviaux du groupe (G, $*$). Les autres sous-groupes, s'il en existe, sont appelés sous-groupes propres de (G, $*$).

Exemples :

• $(\mathbb{Z};+)$; $(\mathbb{Q};+)$; $(\mathbb{R};+)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C};+)$

• $(\mathbb{Q}^*;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*;\times)$

• $(\mathbb{R}_n[X];+)$ est un sous-groupe de $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+)$

• $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

$(U;\times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

$(U;+)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C};+)$

• $(\mathbb{N};+)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z};+)$

Exemple:(on considére l'ensemble des matrices suivante : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}/a\in\mathbb{R}\right\}$

Monter que E n'est pas un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

Solution : soit $M_a\in E$ et $M_b\in E$

Donc : $M_a=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ et $M_b=\begin{pmatrix}1 & b\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

$M_a\times M_b\in E$?

$$M_a\times M_b=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & b\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & b\\ 2 & 2b\end{pmatrix}\notin E$$

donc : E n'est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

donc : E n'est pas un sous-groupe e $(M_2(\mathbb{R});+)$

Théorème :(caractérisations d'un sous-groupe).
Soient (G, $*$) un groupe et H une partie de G.

1)H est un sous-groupe de (G, $*$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\,e\in H\\ (2)\,\forall(x,y)\in H^2;x*y\in H\\ (3)\,\forall x\in H;x'\in H\end{cases}\quad(I)$$

2)H est un sous-groupe de (G, $*$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\,H\neq\varnothing\\ (2)\,\forall(x,y)\in H^2;x*y'\in H\end{cases}(II)$$

Démonstration :

• Supposons que H soit un sous-groupe de (G, $*$), alors la propriété (2) de (I) est vérifiée.
Notons e_H l'élément neutre de H.
On a $e_H * e = e_H$ car e est élément neutre de G et d'autre part, $e_H = e_H * e_H$ car e_H est élément neutre de H. Par suite, $e_H * e = e_H * e_H$.
Maintenant, dans le groupe (G, $*$), tout élément

est métrisable et en particulier, tout élément est regulier. Après simplification par e_H, on obtient e = e_H. Ceci montre en particulier
que e ∈ H.
Soit x un élément de H. Notons x'_H son symétrique pour ∗ dans H.
On a $x'_H * x * x' = e * x' = x'$(puisque $e_H = e$) et d'autre part,$x_H * x * x' = x'_H * e = x'_H$.
Donc, le symétrique x'_H de x dans H est son symétrique x′ dans G. Ceci montre en particulier que x′ est dans H.
On a montré que si H est un sous-groupe de (G, ∗) alors (I) est vérifié.
• Montrons que : (I) ⇒ H sous-groupe de (G, ∗).
Supposons (I).
H est une partie non vide de G d'après (1). La restriction de ∗ à H^2 est une loi interne dans H d'après (2). ∗ est associative dans G
et donc la loi induite est associative dans H
L'élément neutre e de (G, ∗) vérifie :
∀x ∈ H, x ∗ e = e ∗ x = x et donc e est élément neutre de H pour la loi induite.
Enfin, si x est un élément quelconque de H, le symétrique x′ de x dans G est dans H et vérifie x∗x′= x′∗x = e où e est maintenant élément neutre de H. x′ est donc le symétrique de x dans H et on a montré que tout élément de H admet un symétrique dans H.
De tout ceci, on en déduit bien que H est un sous-groupe de (G, ∗)
Donc que (H sous-groupe) ⇔ (I).
• Il est clair que (I) ⇒ (II). Il reste à montrer que (II) ⇒ (I). On suppose donc que H vérifie (II).
Soit x un élément de H. Puisque e et x sont dans H alors: H≠∅et e ∗ x′= x′ est dans H d'après (2).
Ainsi, ∀x ∈ H, x′ ∈ H.
Soient enfin, x et y deux éléments de H.
D'après ce qui précède, y′est encore dans H
Donc x ∗ (y′)′= x ∗ y est dans H.
On a montré que (II) ⇒ (I)
Finalement que (I) ⇔ (II).

Remarque : soit : $(G;*)$ un groupe

1) on utilusant une notation additive on a :

H est un sous-groupe de$(G;+)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \emptyset \\ (2) \forall (x,y) \in H^2; x-y \in H \end{cases}$$

2) on utilusant une notation multiplicative

on a : H est un sous-groupe de$(G;\times)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) H \neq \emptyset \\ (2) \forall (x,y) \in H^2; xy^{-1} \in H \end{cases}$$

Exemple1 : soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs

montrer que $(I;+)$ est un sous-groupe de$(\mathbb{Z};+)$

Solution :on a **:** $I \subset \mathbb{Z}$

$(1) I \neq \emptyset$ car $0 = 2\times 0 \in I$

$(2) \forall (x,y) \in I^2; x-y \in I$?

Soient : $x \in I$ et $y \in I$ donc : $x = 2\times p$ et $x = 2\times q$

$x - y = 2\times p - 2\times p = 2\times (p-p) = 2\times k \in I$

Donc : $(I;+)$ est un sous-groupe de$(\mathbb{Z};+)$ d'après

La propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exemple2 : montrer que : $H = \left\{3^m 7^n / m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}\right\}$

est un sous-groupe de$\left(\mathbb{R}^*;\times\right)$

Solution :on a : $H \subset \mathbb{R}^*$ car $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2; 3^m 7^n \in \mathbb{R}^*$

$(1) H \neq \emptyset$ car $3^0 7^0 = 1 \in H$

$(2) \forall (x,y) \in H^2; x \times y^{-1} \in H$?

Soient : $x \in H$ et $y \in H$ donc :

$\exists (n,m) \in \mathbb{Z}^2; x = 3^m 7^n$

Et $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2; y = 3^p 7^q$

$x \times y^{-1} = 3^m 7^n \times \left(3^p 7^q\right)^{-1} = 3^m 7^n \times 3^{-p} 7^{-q}$

$x\times y^{-1}=3^{m}7^{n}\times\left(3^{p}7^{q}\right)^{-1}=3^{m-p}7^{n-q}=3^{e}7^{f}$

Avec : $(e,f)\in\mathbb{Z}^2$ donc :

$(2)\forall(x,y)\in H^2; x\times y^{-1}\in H$

Donc : $(H;\times)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R}^*;\times\right)$

D'après la propriété caractéristique d'un sous-groupe

Exemple3 : Si E est un ensemble, l'intersection dans P(E) est interne, commutative, associative et possède un élément neutre, à savoir E.
Soit alors F une partie stricte de E. P(F) est une partie non vide de P(E), stable pour l'intersection (l'intersection de deux parties de F reste une partie de F). L'intersection possède un élément neutre dans P(F), à savoir F. Cet élément neutre est distinct de l'élément neutre de (P(E), ∩). Une conséquence est que (P(E), ∩) n'est pas un groupe.

Exemple4 : $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$

Montrer que $(U;\times)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{C}^*;\times\right)$

Solution :
1) Un nombre complexe de module 1 est non nul et donc $U\subset\mathbb{C}^*$

Et 1 a pour module 1 et donc 1 ∈ U.

Soit alors $(z_1;z_2)\in U^2$.

$z_1\times z_2^{-1}\in U$???

$\left|z_1\times z_2^{-1}\right|=|z_1|\times\left|z_2^{-1}\right|=|z_1|\times|z_2|^{-1}=1\times1=1\times1\in U$

Exercice 3: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}\ln a & 0\\ 0 & \ln a\end{pmatrix}/a\in\mathbb{R}^{+*}\right\}$$

Monter que E est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

Solution : 1)on a $M_e=\begin{pmatrix}\ln e & 0\\ 0 & \ln e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

Donc : $I_2\in E$ donc : $E\neq\varnothing$

2) soit $M_a\in E$ et $M_b\in E$

$M_a-M_b\in E$? :

$$M_a-M_b=\begin{pmatrix}\ln a & 0\\ 0 & \ln a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\ln b & 0\\ 0 & \ln b\end{pmatrix}$$

$$M_a-M_b=\begin{pmatrix}\ln a-\ln b & 0\\ 0 & \ln a-\ln b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln\frac{a}{b} & 0\\ 0 & \ln\frac{a}{b}\end{pmatrix}=M_{a/b}$$

Et puisque $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et $b\in\mathbb{R}^{+*}$ alors $a/b\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc : $M_a-M_b=M_{a/b}\in E$

Donc : E est un sous-groupe de $\left(M_2(\mathbb{R});+\right)$

Exercice 4 :soit $(G;\cdot)$ un groupe noté multiplicativement et soit $a\in G$

On pose : $C_a=\{x\in G/ax=xa\}$

(centralisateur de a)

Et : $Z(G)=\{x\in G/\forall y\in G:xy=yx\}$

(centre de G)

Montrer que C_a et $Z(G)$ sont des sous-groupes de $(G;\cdot)$

Solution : 1) Montrons que C_a est un sous-groupe de $(G;\cdot)$?

Soit e l'élément neutre du groupe $(G;\cdot)$

a) on a : $ae=ea=a$ donc $e\in C_a$ donc : $C_a\neq\varnothing$

b)soient les éléments $(x;y)\in C_a^{\,2}$

montrons que : $xy^{-1}\in C_a$ cad montrons que :

$a\left(xy^{-1}\right)=\left(xy^{-1}\right)a$??

On a $(x;y)\in C_a{}^2$ donc : $\begin{cases} ax = xa(1) \\ ay = ya(2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (ay)^{-1} = (ya)^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1}$

$\Rightarrow y^{-1}a^{-1} = a^{-1}y^{-1}$ et $ax = xa(1)$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xaa^{-1}y^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xey^{-1}$

$\Rightarrow axy^{-1}a^{-1} = xy^{-1} \Rightarrow axy^{-1}a^{-1}a = xy^{-1}a$

$\Rightarrow axy^{-1}e = xy^{-1}a \Rightarrow axy^{-1} = xy^{-1}a$ donc $xy^{-1} \in C_a$

Donc : C_a est un sous-groupe de $(G;\cdot)$

2) Montrons que $Z(G)$ est un sous-groupe

de $(G;\cdot)$?

a) on a : $\forall y \in G : ey = ye$ donc $e \in Z(G)$

donc : $Z(G) \neq \varnothing$

b)soient les éléments $(a;b) \in Z(G)^2$

montrons que : $ab^{-1} \in Z(G)$ cad montrons que :

$(ab^{-1})y = y(ab^{-1})$ $\forall y \in G$??

On a $(a;b) \in Z(G)^2$ donc : $\begin{cases} ay = ya(1) \\ by = yb(2) \end{cases}$

De la même façon que précédemment on trouve

$(ab^{-1})y = y(ab^{-1})$ $\forall y \in G$ donc $ab^{-1} \in Z(G)$

Donc : $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G;\cdot)$

Théorème : Si H et K sont des sous-groupes de (G, ∗), H ∩ K est un sous-groupe de (G, ∗). Ainsi, une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Démonstration. (On utilise la caractérisation (II) ci-dessus). Soient H et K deux sous-groupes. D'après ce qui précède, H etK contiennent l'élément neutre e de G et donc e ∈ H ∩ K. D'autre part, bien sûr H ∩ K ⊂ G.
Soient alors x et y deux éléments de H ∩ K.

$(x, y) \in (H \cap K)^2 \Rightarrow ((x, y) \in H^2$
et $(x, y) \in K^2) \Rightarrow (x * y' \in H$ et $x * y' \in K)$
$\Rightarrow x * y' \in H \cap K$.
Ceci montre que H ∩ K est un sous-groupe de (G, ∗).

Théorème : soit f un homomorphisme du groupe (G, ∗)Dans un groupe(F ; $\top$)
L'image du groupe (G, ∗) par l'homomorphisme f C'est le groupe(f(G) ; $\top$)

Démonstration : on a déjà montré que f(G) Est une partie stable (F ; $\top$) et donc :
∗ est associative dans : (G, ∗) donc :
∗ est associative dans : (f(G) , $\top$) soit e l'élément neutre de (G, ∗) donc : $f(e)$est l'élément neutre de (f(G) , $\top$) et si x' est le symétrique de x dans (G, ∗) alors $f(x')$ est le symétrique de $f(x)$ Dans (f(G) ; $\top$)
Donc : (f(G) ; $\top$) est un groupe

Remarque :
Si f un homomorphisme surjectif alors f(G) =F
Dans ce cas L'image du groupe (G, ∗) par l'homomorphisme f c'est le groupe (F ; $\top$)

1)Exemples :
Les applications suivantes :

$g:(\mathbb{R}^{*+};\times) \to (\mathbb{R};+)$, $x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $f:(\mathbb{Z};+) \to (\mathbb{R}^{*+};\times)$, $r \mapsto 2^r$

$h:(\mathbb{C};\times) \to (\mathbb{C};\times)$, $z \mapsto \overline{z}$ $\qquad$ $l:(\mathbb{R};+) \to (\mathbb{R}^{*+};\times)$, $x \mapsto e^x$

Sont des homomorphismes de groupes

Exercice 5 : On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne définie par :

$x * y = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}\,;\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2$

1)soit l'application :

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$ vers $(\mathbb{R};*)$

2) En déduire la structure de $(\mathbb{R};*)$

Solution :1) a) f est une fonction continue et

dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\succ 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Par suite f est une fonction bijectif de $\mathbb{R}$

Dans $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

b) soient $x;y\in\mathbb{R}$

$$f(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x)*f(y)=f(x)\sqrt{f(y)^{2}+1}+f(y)\sqrt{f(x)^{2}+1}$$

Et on a :

$$f(y)^{2}+1=1+\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^{2}=\frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4}=\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)^{2}$$

Donc : $\sqrt{f(y)^{2}+1}=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ de même on a :

$\sqrt{f(x)^{2}+1}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ Donc :

$$f(x)*f(y)=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$f(x)*f(y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

Finalement : $f(x+y)=f(x)*f(y)$

Donc : f est un homorphisme bijectif de $(\mathbb{R};+)$

vers $(\mathbb{R};*)$donc un isomorphisme

2)puisque : f est un isomorphisme de $(\mathbb{R};+)$vers

$(\mathbb{R};*)$ et $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif

Alors : $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

II) Anneaux

1)Distributivité d'une loi sur une autre

Définition : Soient E un ensemble non vide
$*$ et T deux lois de composition internes sur E.
T est distributive sur $*$ ⇔ ∀(x, y, z) ∈ E^3
x T (y $*$ z) = (x T y) $*$ (x T z)
Et (y $*$ z) T x = (y T x) $*$ (z T x).

Remarque : Si on sait que T est commutative, une et une seule des deux égalités ci-dessus suffit.

Exemples :1) Dans $\mathbb{C}$, la multiplication est distributive sur l'addition

$\forall(x;y;z)\in\mathbb{C}^{3}$: $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$

2)Dans P(E), l'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur

l'intersection : $\forall(A;B;C)\in P(E)^{3}$:

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

3)Dans $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});\circ)$ $\circ$ est distributive à droite

sur +, mais pas à gauche ((g+h)◦f = g◦f+h◦f, mais en général, f◦(g+h) 6= f◦g+f◦h.

1) dans $M_{2}(\mathbb{R})$ et $M_{3}(\mathbb{R})$ la multiplication est

distributive sur l'addition mais l'addition

$\forall(A;B;C)\in M_{3}(\mathbb{R})^{3}$:

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

$$(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$$

4) dans $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$;$\mathbb{R}$;$\mathbb{C}$ l'addition n'est pas

distributive sur la multiplication :

$1+(5\times 3)\neq(1+5)\times(1+3)$

5)on muni $\mathbb{N}$ de la loi

5)on muni $\mathbb{N}$ d'une loi de composition interne $*$

définit par : $a*b=a^{b}$ si $a\neq 0$ et $a\neq 0$;

Et $a*0=1$

Etudions la distributivité de la loi $*$ par rapport a la multiplication ??

a) $a*(b\times c)=a^{bc}$

$(a*b)\times(a*c)=a^{b}\times a^{c}=a^{b+c}$

$a*(b\times c)\neq(a*b)\times(a*c)$ donc la loi $*$ n'est pas distributive a gauche sur la multiplication

b) $(b\times c)*a=(bc)^{a}$

$(b*a)\times(c*a)=b^{a}\times c^{a}=(bc)^{a}$

Donc : $(b\times c)*a=(b*a)\times(c*a)$ donc la loi $*$ est distributive à droite sur la multiplication

Finalement : la loi $*$ n'est pas distributive sur la multiplication

2) Anneaux

Définition : Soit A un ensemble non vide ayant au moins deux éléments muni de deux lois de composition interne (notées $*$ et T).

(A, $*$, T) est un anneau $\Leftrightarrow$

1) (A, $*$) est un groupe commutatif
2) T est associative
3) T est distributive sur $*$

L'anneau est commutatif si et seulement si T est commutative si de plus T admet un élément neutre on dira qu'il est unitaire

Notation additif et multiplicatif :

On note en général la première loi + et la deuxième loi $\times$

On aura alors l'anneau (A, +, $\times$)

On note 0 l'élément neutre pour la loi + et on l'appelle l'élément nul de l'anneau A

Si la loi $\times$ admet un élément neutre on le note1 et on l'appelle l'élément unitaire de l'anneau A

Donc **<u>les conditions (axiomes)pour un anneau (A, +, $\times$)deviennent :</u>**

1) $\forall(x;y;z)\in A^{3}:\quad x+(y+z)=(x+y)+z$

2) $\forall(x;y)\in A^{2}:\quad x+y=y+x$

3) $\exists 0\in A\ \ \forall x\in A:\quad x+0=x$

4) $\forall x\in A\ \ \exists -x\in A:\quad x+(-x)=0$

5) $\forall(x;y;z)\in A^{3}:\quad x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$

6) $\forall(x;y;z)\in A^{3}:\quad x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ et

$(x+y)\times z=x\times z+y\times z$

3)Exemples anneaux :

1) $(\mathbb{Z};+;\times)$; $(\mathbb{Q};+;\times)$; $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;\times)$

Sont des anneaux commutatifs unitaires
(1 l'élement unitaire)

2) $(\mathbb{N};+;\times)$ n'est pas un anneau (car ($\mathbb{N}$, +) n'est pas un groupe)

3)L'anneau des polyn^omes de degré inferieur a n

$(\mathbb{R}_{n}[X];+;\times)$ Est un anneau commutatif unitaire

4) $(M_{2}(\mathbb{R});+;\times)$; $(M_{3}(\mathbb{R});+;\times)$ Sont des anneaux non commutatifs mais unitaires

(Is matrice unitaires sont resp:

$I_{2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $I_{3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$)

5) $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\circ)$ n'est pas un anneau car la loi $\circ$ n'est distributive sur l'addition

En effet : $f:x\to x$ et $g:x\to 1$ et $h:x\to\sqrt{|x|}$

On montre que :

$[h\circ(f+g)](x)\neq(h\circ f)(x)+(h\circ g)(x)$

6) $(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times)$ est unanneau commutatif unitaire

($U:x\to 1$ l'élement unitaire)

7) $(P(E);\Delta;\cap)$ est unanneau commutatif unitaire

(E l'élement unitaire)

8) $(P(E);\Delta;\cup)$ n'est pas un anneau car la loi $\cup$ n'est distributive sur Δ

4)Calculs dans un anneau

Théorème : Soit (A, +, $*$) un anneau. On note 0_{A} l'élément neutre de A pour +.

$\forall x \in A$, $x * 0_A = 0_A * x = 0_A$ (l'élément neutre pour l'addition est toujours absorbant pour la multiplication).

Démonstration :

Soit $x \in A$. $0_A * x = (0_A + 0_A) * x = 0_A * x + 0_A * x$ car $*$ est distributive sur +. Maintenant, (A, +) est un groupe et dans un groupe, tout élément est régulier.

Donc, $0_A * x + 0_A * x = 0_A * x = 0_A * x + 0_A$

entraîne $0_A * x = 0_A$. de même, $x * 0_A = 0_A$. ❑

Théorème : Soit $(A, +, *)$ un anneau.

$\forall (a, b) \in A^2$

$(-a) * b = a * (-b) = -(a * b)$

Démonstration : Soit $(a, b) \in A^2$

$a * b + (-a) * b = (a + (-a)) * b = 0_A * b = 0_A$

et donc $(-a) * b = -a * b$.

De même, $a * b + a * (-b) = a * (b + (-b))$

$= a * 0_A = 0_A$ et donc $a * (-b) = -a * b$.

Remarques : Dans un anneau (ayant au moins deux éléments) on montre aisément

que : $0_A \neq 1_A$ et que 0_A n'a pas de symétrique (pour

la 2iém loi). Si tous les autres éléments de A sont Inversibles, on montrera que l'ensemble des

éléments non nuls $A^* = A - \{0_A\}$

Forme un groupe (pour la loi 2iém loi)

Théorème : Soit (A, +, ×) un anneau.

On note A^* l'ensemble des éléments de A qui sont inversibles c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A symétrisables pour ×

$(A^*, \times)$ est un groupe.

Démonstration : 1_A est un élément de A^*

car 1_A est inversible pour ×, d'inverse lui-même.

Donc : $A^* \neq \varnothing$

• Si x et y sont deux éléments de A^*

on sait que x × y est dans A^* et que :

$(x \times y)^{-1} = y^{-1} \times x^{-1}$

Donc, × induit une loi de composition interne sur A^* que l'on note encore ×.

× est associative dans A et donc × est associative dans A^*

$1_A \in A^*$ et pour tout x de A^*, $1_A \times x = x \times 1_A = x$.

Donc, × possède un élément neutre 1_A dans A^*

Soit $x \in A^*$. On sait que $x^{-1} \in A^*$ et que

$(x^{-1})^{-1} = x$. Donc, tout élément de A^* admet un symétrique pour × dans A^*

Donc : $(A^*, \times)$ est un groupe

4) Diviseurs de zéro - Anneau intègre

4-1) Diviseurs de zéro

Exemple : Considérons les deux matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aucune de ces deux matrices n'est la matrice nulle, et pourtant leur produit vérifie :

$$M \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que les matrices *M* et *N* sont des *diviseurs de zéro.*

Plus généralement, on a les définitions suivantes :

Définition 1: Soit $(A; *; \mathrm{T})$ un anneau et e

l'élément neutre pour $*$

Un élément $a \neq e$ de A est appelé un diviseur de zéro s'il existe un autre élément $b \neq e$ de A tel que $a \mathrm{T} b = e$ et $b \mathrm{T} a = e$

Définition 2 : l'anneau $(A; *; \mathrm{T})$ est dit intègre

S'il ne possède pas de diviseurs de zéros

Définition 3 : l'anneau $(A; +; \times)$ est intègre

Ssi : $a \times b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Exemples :

- $(\mathbb{Z}; +; \times)$ est un anneau intègre : le produit de deux entiers relatifs est nul si et seulement si l'un de ces deux entiers est nul.
- L'exemple précédent montre que $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ n'est pas un anneau intègre.

De même pour $\left(M_3(\mathbb{R});+;\times\right)$

- $\left(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\times\right)$ est unanneau commutatif unitaire

Non intègre en effet :

$$f:x\to\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1};x\geq 0\\ 0;x\prec 0\end{cases}\quad \text{et}\quad g:x\to\begin{cases}0;x\geq 0\\ x^5;x\prec 0\end{cases}$$

On a : $f\neq\theta$ et $g\neq\theta$ avec $\theta:x\to 0$ l'élément neutre de $\left(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+\right)$

On montre que : $f\times g=\theta$

- $\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times\right)$n'est pas un anneau intègre.

Car : $\overline{2}\neq\overline{0}$et $\overline{3}\neq\overline{0}$ mais $\overline{2}\times\overline{3}=\overline{6}=\overline{0}$

$\overline{3}$ est un diviseur de zéro et $\overline{2}$ aussi

- $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};+;\times\right)$est un anneau intègre.

Tableau de : $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z};\times\right)$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

proposition : soit $(A;*;\mathrm{T})$ un anneau unitaire si $a\in A$ admet un symétrique pour T alors a n'est pas un diviseur de zéro dans $(A;*;\mathrm{T})$

Preuve : Soit e l'élément neutre pour $*$ et Soit f l'élément neutre pour T et a' le symétrique De a

Supposons qu'il existe $b\in A$ tel que : $a\mathrm{T}b=e$ et $b\mathrm{T}a=e$

$a\mathrm{T}b=e\Leftrightarrow a'\mathrm{T}(a\mathrm{T}b)=a'\mathrm{T}e\Leftrightarrow(a'\mathrm{T}a)\mathrm{T}b=e$

$\Leftrightarrow f\mathrm{T}b=e\Leftrightarrow b=e$

Exercice 6 : on considére l'ensemble suivant :

$E=\left\{a+b\sqrt{3}\,/\,(a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2) Monter que E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) Monter que $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

Solution : 1) Montrons que$(E;+)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q};+)$?

On a $E\subset\mathbb{Q}$ et on a $1=1+0\sqrt{3}$ donc : $1\in E$

donc : $E\neq\varnothing$

soit $x\in E$ et $y\in E$ montrons $x-y\in E$?

$x\in E\Leftrightarrow\exists(a;b)\in\mathbb{Q}^2\,/\,x=a+b\sqrt{3}$

$y\in E\Leftrightarrow\exists(c;d)\in\mathbb{Q}^2\,/\,x=c+d\sqrt{3}$

$x-y=\left(a+b\sqrt{3}\right)-\left(c+d\sqrt{3}\right)=(a-c)+(b-d)\sqrt{3}$

On a $(a;b;c;d)\in\mathbb{Q}^4$ donc : $a-c\in\mathbb{Q}$ et $b-d\in\mathbb{Q}$

Donc : $x-y=a''+b''\sqrt{3}$ par suite : $x-y\in E$

Donc : $(E;+)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{Q};+)$

donc $(E;+)$ est un un groupe

2)) Montons que E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$?

soit $x\in E$ et $y\in E$ montrons $x\times y\in E$?

$x-y=\left(a+b\sqrt{3}\right)\times\left(c+d\sqrt{3}\right)=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}$

puisque $(a;b;c;d)\in\mathbb{Q}^4$ alors : $ac+3bd\in\mathbb{Q}$ et $ad+bc\in\mathbb{Q}$ donc : $x\times y\in E$

: $E=\left\{a+b\sqrt{3}\,/\,(a;b)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

Donc : E est une partie stable de $(\mathbb{Q};\times)$

3) on a $(\mathbb{Q};+;\times)$ est un anneau commutatif

Donc La multiplication est commutative et distributive par rapport à l'addition dans E

Par suite $(E;+;\times)$ un anneau commutatif

Et $1=1+0\sqrt{3}$ donc : $1\in E$ et 1 est l'élément neutre de la multiplication dans $(\mathbb{Q};\times)$

Donc : 1 est l'élément neutre de la multiplication dans E

Conclusion : $(E;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire

Exercice 7: Soit $(A;+;\times)$ un anneau.

Tel que : $x^2=x \quad \forall x\in A$ ($(A;+;\times)$ s'appelle anneau
De Boole)

1) calculer $(x+x)^2$

2)en déduire que : $x+x=0_A$ (0_A est l'élément neutre de $(A;+)$)

3)soient : $x\in A$ et $y\in A$

a) calculer $(x+y)^2$ en fonction de x et y

b) en déduire que $(A;+;\times)$ est commutatif

c) en déduire : $xy(x+y)$

4)on suppose que : $x\neq 0_A$ et $y\neq 0_A$ et $y\neq x$

a) montrer que : a) $x+y\neq 0_A$ b) $x+y\neq y$

5)déterminer le tableau de la somme pour les éléments : 0_A ; x ; y ; $x+y$

Solution : 1)soit $x\in A$ on a :

$(x+x)^2=(x+x)(x+x)=xx+xx+xx+xx$

$(x+x)^2=x^2+x^2+x^2+x^2=x+x+x+x$ car $x^2=x$

Donc : $(x+x)^2=x+x+x+x$

2)a)soient : $x\in A$ et $y\in A$

$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=xx+xy+yx+yy$

$(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$

$(x+y)^2=x+xy+yx+y$ car $x^2=x \quad \forall x\in A$

b)on a : $(x+y)^2=x+xy+yx+y$ et $(x+y)^2=x+y$

donc : $x+xy+yx+y=x+y$

donc : $xy+yx=0_A$ et puisque $xy+xy=0_A$

Alors : $xy+yx=xy+xy$ donc $yx=xy$

Donc : $(A;+;\times)$ est commutatif

c) déduction de : $xy(x+y)$

soient : $x\in A$ et $y\in A$

$xy(x+y)=xyx+xy^2=xxy+xy^2=x^2y+xy^2=xy+xy$

et puisque $xy+xy=0_A$ alors : $xy(x+y)=0_A$

4) on suppose que : $x\neq 0_A$ et $y\neq 0_A$ et $y\neq x$

a) on suppose que $x+y=0_A$ et puisque $x+x=0_A$

Alors : $x+y=x+x$ cad $y=x$ contradiction

Donc : $x+y\neq 0_A$

b) on suppose que $x+y=y$ donc : $x=0_A$

Contradiction donc $x+y\neq y$

5) on a : $x+x=0_A$ et $x+0_A=0_A+x=x$

$+$	0_A	x	y	$x+y$
0_A	0_A	x	y	$x+y$
x	x	0_A	$x+y$	y
y	y	$x+y$	0_A	x
$x+y$	$x+y$	y	x	0_A

III) corps

1)Définition : Soit (K, +, ×) un anneau.
(K, +, ×) est un corps si et seulement si tout élément non nul de K admet un inverse (pour ×) dans K.et le corps est commutatif si et seulement si $*$ est commutative.

Exemples :1) $(\mathbb{Q};+;\times)$; $(\mathbb{R};+;\times)$; $(\mathbb{C};+;\times)$ sont des corps commutatifs.

2) $(\mathbb{Z};+;\times)$ Est un anneau commutatif qui n'est pas un corps car par exemple, le nombre 2 n'est Pas inversible dans Z.

3) $(M_2(\mathbb{R});+;\times)$ n'est pas un corps car par exemple : $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ n'est pas inversible

4) $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z};+;\times)$ n'est pas un corps car par exemple $\bar{3}$ n'est pas inversible

2)Notation additif et multiplicatif d'un corps :

On note en général la première loi + et la deuxième loi $\times$
On aura alors le corps (K, +, $\times$)
On note 0 l'élément neutre pour la loi + et on l'appelle l'élément nul du corps K
l'élément neutre pour la loi $\times$ on le note1
et on l'appelle l'élément unitaire corps K

<u>Donc les conditions (axiomes)pour un corps</u> (K, +, $\times$) <u>deviennent :</u>

1) $\forall(x;y;z)\in K^3$: $x+(y+z)=(x+y)+z$

2) $\forall(x;y)\in K^2$: $x+y=y+x$

3) $\exists 0\in K\ \ \forall x\in K$: $x+0=x$

4) $\forall x\in K\ \ \exists -x\in K$: $x+(-x)=0$

5) $\forall(x;y;z)\in K^3$: $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$

6) $\exists 1\in K\ \ \forall x\in K$: $x\times 1=x\times 1=x$

7) $\forall x\in K-\{0\}\ \ \exists x^{-1}\in K-\{0\}$: $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$

8) $\forall(x;y;z)\in K^3$: $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ et

$(x+y)\times z=x\times z+y\times z$

Théorème : Dans un corps, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ces facteurs est nuls :

$\forall(x;y)\in K^3$: $x\times y=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $y=0$

Donc un un corps ne contient pas de diviseur de zéro

Démonstration. Soit (K, +, ×) : on note 0 (resp. 1) l'élément neutre pour + (resp. ×).
Soit (a, b) ∈ K^2 tel que :a × b = 0.
Si a ≠ 0, a admet un inverse pour × noté a^{-1}
On peut écrire :a × b = 0 ⇒
$a^{-1}\times a\times b=a^{-1}\times 0$
⇒ 1 × b = 0 ⇒ b = 0.

Exercice : soit (K, +, ×) un corps finit :
$K=\{0;e;x_1;x_2;...;x_m\}$; $m\in\mathbb{N}^*$
Avec : 0 (resp. e) l'élément neutre pour +(resp. ×).
1)montrer que : $-e$ et e sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×
2)montrer que le produit de tous les éléments de K est égal a $-e$
3)on considérant le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+;\times)$ avec n premier montrer que : $\overline{(n-1)!}+1\equiv 0[n]$

Solution :1)

$\forall x\in K-\{0\}\quad x=x^{-1}\Leftrightarrow x\times x=x^{-1}\times x\Leftrightarrow x^2=e$

$\Leftrightarrow x^2-e=0\Leftrightarrow x^2-e^2=0\Leftrightarrow(x-e)(x+e)=0$

$\Leftrightarrow x=-e$ ou $x=e$ car (K, +, ×) un corps
2)puisque : $-e$ et e sont les seuls élément de K qui sont égaux à leurs symétriques pour la loi ×
Alors : $K-\{0\}=\{-e;e;a_1;a_1^{-1};a_2;a_2^{-1}...;a_p;a_p^{-1}\}$

Donc : $-e\times e\times a_1\times a_1^{-1}\times a_2\times a_2^{-1}...\times a_p\times a_p^{-1}=$
$=-e\times e\times e\times e...\times e=-e$

3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};.....;\overline{n-1}\}$ (un corps)

D'après les questions précédentes on a :

$\overline{1}\times\overline{2}\times.....\times\overline{n-1}=-\bar{1}$ donc :

$\overline{1\times2\times3\times.....\times(n-1)}=-\bar{1}$

donc : $\overline{(n-1)!}+1\equiv0[n]$

Théorème : Dans un corps, tout élément de $K-\{0\}$ est régulier pour la loi × :

$\forall(x;y)\in K^3$ et $\forall a\in K-\{0\}$

$ax=ay\Rightarrow x=y$ et $xa=ya\Rightarrow x=y$

Exercice8: on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$E=\left\{M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1)Monter que $(E;+)$ est un groupe commutatif

2)Monter que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soit f l'application qui associe à chaque matrice $M_{(a;b)}$ de $E-\{0_2\}$ le nombre complexe : $a+ib\sqrt{2}$ de $\mathbb{C}^*$

a) Monter que f est un morphisme bijectif de ($E-\{0_2\}$, ×) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)en déduire la structure de ($E-\{0_2\}$, ×)

4) Monter que $(E;+;\times)$ est un corps

Solution : 1)on a : $M_{(0;0)}=0_2\in E$ donc : $E\neq\varnothing$

Et on a $E\subset(M_2(\mathbb{R});\times)$

soit $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(c;d)}\in E$

Donc : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & a\end{pmatrix}$ et $M_{(c;d)}=\begin{pmatrix}c & -2d\\ d & c\end{pmatrix}$

$$M_{(a;b)}-M_{(c;d)}=\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & -2d\\ d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c & -2(b-d)\\ b-d & a-c\end{pmatrix}$$

Donc : $M_{(a;b)}-M_{(c;d)}=M_{(a-c;b-d)}$

Et puisque : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ alors : $a-c\in\mathbb{R}$ et $b-d\in\mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)}-M_{(c;d)}\in E$

Donc :$(E;+)$ est un un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R});+)$

donc $(E;+)$ est un groupe commutatif

2) $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix}a & -2b\\ b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c & -2d\\ d & c\end{pmatrix}=$

$$M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}=\begin{pmatrix}ac-2bd & -2(ad+bc)\\ ad+bc & ac-2bd\end{pmatrix}=M_{(ac-2bd;ad+bc)}$$

Et puisque : $(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd\in\mathbb{R}$ et $ad+bc\in\mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\in E$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soient : $M_{(a;b)}\in E$ et $M_{(c;d)}\in E$

$f\left(M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\right)=f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$=ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}$

$f\left(M_{(a;b)}\right)\times f\left(M_{(c;d)}\right)=\left(a+ib\sqrt{2}\right)\left(c+id\sqrt{2}\right)$

$=ac-2bd+i(ad+bc)\sqrt{2}=f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$=f\left(M_{(a;b)}\times M_{(c;d)}\right)$

f est un morphisme de ($E-\{0_2\}$, ×) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $x+iy\in\mathbb{C}^*$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)}\in E$ tel que : $f\left(M_{(a;b)}\right)=x+iy$

$f\left(M_{(a;b)}\right)=x+iy\Leftrightarrow a+ib\sqrt{2}=x+iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ Existe et il est unique

donc : f est un morphisme bijectif de

($E-\{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)($E-\{0_2\}$, $\times$) et $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*;\times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a ($E-\{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

4)La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E;+)$ est un groupe commutatif et

($E-\{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion :

$(E;+;\times)$ est un corps

Exercice 9: Soit $(K;+;\times)$un corps.

On note :0_K l'élément neutre de $(K;+)$ et 1_K l'élément neutre de $(K;\times)$et on suppose qu'il existe un homomorphisme f bijectif de$(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

1)on suppose que $1_K+1_K=0_K$ ¨

montrer que : $f(K)=\{1_K\}$

2) on suppose que : $1_K+1_K\neq 0_K$ et on pose :

$\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$

a) montrer que : $\alpha+\alpha=\beta+\beta$

b) en déduire que $\alpha=\beta$

3) en déduire qu'il n'existe pas d'homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

Solution : 1))on suppose que $1_K+1_K=0_K$ ¨

soit $x\in K$ on a donc: $x\times(1_K+1_K)=x\times 0_K$

donc: $x\times 1_K + x\times 1_K = x\times 0_K$

donc: $x+x=0_K$ donc: $f(x+x)=f(0_K)$

puisque f homomorphisme bijectif de$(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$on a donc : $f(x)\times f(x)=1_K$

donc: $(f(x))^2=1_K$ donc: $(f(x)-1_K)(f(x)+1_K)=0_K$

donc : $f(x)=1_K$ ou $f(x)=-1_K=1_K$ car $1_K+1_K=0_K$

donc : $\forall x\in K$ $f(x)=1_K$ donc : $f(K)=\{1_K\}$

2)a)on a : $1_K+1_K\neq 0_K$ et$\alpha = f^{-1}(1_K)$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)$

$\alpha = f^{-1}(1_K) \Leftrightarrow f(\alpha)=1_K$ et $\beta = f^{-1}(-1_K)\Leftrightarrow f(\beta)=-1_K$

donc : $f(\alpha+\alpha)=(f(\alpha))^2=(1_K)^2=1_K$

et $f(\beta+\beta)=(f(\beta))^2=(-1_K)^2=1_K$

donc : $f(\alpha+\alpha)=f(\beta+\beta)$

donc : $\alpha+\alpha=\beta+\beta$ car f bijectif

b)on a : $\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)\times(1_K+1_K)=0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=0_K$ ou$1_K+1_K=0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta=0_K$ car $1_K+1_K \neq 0_K$

$\alpha+\alpha=\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

3) s'il existe un homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$ on alors deux cas :

1cas : $1_K+1_K=0_K$ d'après 1) on a :

$\forall x\in K \quad f(x)=1_K \Leftrightarrow \forall x\in K; f(x)=f(0_K)$

Puisque f bijectif : $\forall x\in K \quad x=0_K$

Cad $K=\{0_K\}$ et donc : $K-\{0_K\}=\varnothing$

contradiction

2cas : $1_K+1_K\neq 0_K$ d'après 2) et on posons :

$\alpha=f^{-1}(1_K)$ et $\beta=f^{-1}(-1_K)$ on trouve : $\alpha=\beta$

Cad $f^{-1}(-1_K)=f^{-1}(1_K)$ et Puisque f^{-1} bijectif

Alors : $-1_K=1_K$ cad $1_K+1_K=0_K$ contradiction

Avec le fait que $1_K+1_K\neq 0_K$

Donc : qu'il n'existe pas d'homomorphisme f bijectif de $(K;+)$ vers $(K-\{0_K\};\times)$

Exercice10 :

1) On munit de la loi de composition interne définie par : $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$; $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

2)On munit $\mathbb{R}^{+*}$ de la loi de $*$ composition interne définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que $*$ est commutative, associative, et que 0 est élément neutre. Montrer que aucun élément de n'a de symétrique pour $*$

.3)On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par : $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application : $x\to x^3$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R};*)$ vers $(\mathbb{R};+)$ En déduire que $(\mathbb{R};*)$ est un groupe commutatif

Solution :1) $x*y=xy+(x^2-1)(y^2-1)$)

$=yx+(y^2-1)(x^2-1)$

La loi est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver $x;y;z\in\mathbb{R}$ et tels que :

$x*(y*z)\neq(x*y)*z$

1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans $x;y;z$ et.

Prenons, par exemple : $x=0;y=2;z=3$

$x*(y*z)=0*(2*3)=0*(2\times3+(2^2-1)(3^2-1))$

$=0*30=0\times30+(0^2-1)(30^2-1)=-899$

$(x*y)*z=(0*2)*3=0*2+(0^2-1)(2^2-1)*3$

$=-3*3=0*2+((-3)^2-1)(3^2-1)=-9+8^2=55$

La loi n'est pas associative

$1*x=1x+(1^2-1)(x^2-1)=x$

De plus, comme la loi est commutative

$x*1=1*x$

On a bien $x*1=1*x=x$, 1 est l'élément neutre.

$x*y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}=y*x$

La loi est commutative.

$(x*y)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)*z=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}$

$(x*y)*z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

En reprenant le calcul ci-dessus en changeant en $(x;y:z)$ en $(y;z;x)$ $(y*z)*x=\sqrt{y^2+z^2+x^2}$

Comme $*$ est commutative :

$(y*z)*x = x*(y*z)$ Et finalement :

$(x*y)*z = x*(y*z)$

La loi est associative.
Remarque : On aurait pu calculer directement $x*(y*z)$

$0*x = \sqrt{0^2+x^2} = |x|$ car $x \geq 0$

Comme $*$ est commutative : $0*x = x*0 = x$

0 est l'élément neutre.

Supposons x qu'admette un symétrique y

$x*y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = |x| \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x+y = 0$

Or $x \succ 0$ et $y \succ 0$ donc : $x*y = 0$ est impossible, pour tout $x \succ 0$ x n'a pas de symétrique.

3) On pose $\rho(x) = x^3$ ET $\rho'(x) \succ 0$ pour tout $x \neq 0$ et est nul en 0 , ρ est une fonction strictement croissante $\mathbb{R}$ de sur $\mathbb{R}$, ρ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un morphisme.

$\rho(x*y) = (x*y)^3 = \left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3 = x^3+y^3 = \rho(x)+\rho(y)$

ρ est un morphisme de($\mathbb{R}$;$*$) dans ($\mathbb{R}$;+)et donc un isomorphisme de($\mathbb{R}$;$*$) dans ($\mathbb{R}$;+) (puisque ρ est bijective).

ρ^{-1} est un isomorphisme de($\mathbb{R}$;+) dans($\mathbb{R}$;$*$) donc un morphisme, ($\mathbb{R}$;+) est un groupe commutatif
et l'image d'un groupe commutatif par un morphisme de groupe est un groupe.
($\mathbb{R}$;$*$)est un groupe.

Exercice11 : on considére l'ensemble des matrices suivante :

$$G = \left\{ M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2+b^2 = 1 et (a;b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1)Monter que : $G \neq \varnothing$

2)Monter que : $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$

3)Monter que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

4) est ce que G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});+)$?

5)on pose : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

calculer $M^n(\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ou : $M^n(\theta) = \underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times ...\times M(\theta)}_{nfois}$

6) soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans G tel que :

$f(\theta) = M(\theta)$

a) Monter que f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

b)en déduire la structure de $(G;\times)$

7) soit l'ensemble : $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

a) Monter que : $\boldsymbol{U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}}$

b)Monter que $(U;\times)$ est un groupe commutatif

Solution : 1)on a : $M_{(1;0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $0^2+1^2 = 1$

donc : $G \neq \varnothing$

2)

$$M \in G \Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2 / M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} et a^2+b^2 = 1$$

$\exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$

Donc : $M \in G \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$

3)soit: $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$

Deux éléments de G

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

Donc : $M_1 \times M_2 \in G$

Donc G est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

4)on a ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$

Deux éléments de G

Et puisque : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin G$

Car $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$

Donc G n'est pas une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});+)$

5)on pose : $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Calculons : $M^n(\theta)$

$$M^2(\theta) = M(\theta) \times M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Montrons que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

par récurrence sur $\mathbb{N}^*$

a)on a : $M^1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = M(1\theta)$

la ppté est vraie pour n=1

b)on suppose que :

$$M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = M(n\theta)$$

c) montrons que :

$M^{n+1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)n\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix} = M((n+1)\theta)$?

$$M^{n+1}(\theta) = M(\theta)M^n(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta+\theta) & -\sin(n\theta+\theta) \\ \sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta) \end{pmatrix} = M((n+1)\theta)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n(\theta) = M(n\theta)$

6)a)Soit $(\theta_1;\theta_2) \in \mathbb{R}^2$

On a : $f(\theta_1+\theta_2) = M(\theta_1+\theta_2) = M(\theta_1) \times M(\theta_2)$

donc : $f(\theta_1+\theta_2) = f(\theta_1) \times f(\theta_2)$

donc : f est un morphisme de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

et on a : $\forall M \in G \quad \exists \theta \in \mathbb{R}$ / $f(\theta) = M(\theta)$

donc f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$

6)b)puisque f est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R};+)$ dans $(G;\times)$ on a $f(G) = \mathbb{R}$ et on a aussi $(\mathbb{R};+)$ est un groupe commutatif alors aussi $(G;\times)$ est un groupe commutatif

7) a)Montrons que : $U = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R}\}$?

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $z = a+ib$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$$z \in U \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |a+ib| = 1$$

$$z \in U \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

$\Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} / a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ et $z = a+ib$

$z \in U \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{\theta i}$

Donc : $U = \left\{ e^{i\theta} \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

b)Montrons que $(U;\times)$est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

on a $U \subset \mathbb{C}^*$ et $U \neq \varnothing$ car $1 \in U$

Soient $z_1 \in U$ et $z_2 \in U$ montrons que $z_1 \times z^{-1}{}_2 \in U$?

$z_1 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : z_1 = e^{\theta_1 i}$

$z_2 \in U \Leftrightarrow \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : z_2 = e^{\theta_2 i}$

On a : $z_1 \times z^{-1}{}_2 = e^{\theta_1 i} \times \left(e^{\theta_2 i}\right)^{-1} = e^{\theta_1 i} \times e^{-\theta_2 i} = e^{(\theta_1 - \theta_2)i}$

Avec $\theta_1 - \theta_2 \in \mathbb{R}$ donc : $z_1 \times z^{-1}{}_2 \in U$

Donc : $(U;\times)$ est un un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*;\times)$

Et puisque $(\mathbb{C}^*;\times)$ est commutatif

Alors : $(U;\times)$ est un groupe commutatif

2) $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -2d \\ d & c \end{pmatrix} =$

$$M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} = \begin{pmatrix} ac-2bd & -2(ad+bc) \\ ad+bc & ac-2bd \end{pmatrix} = M_{(ac-2bd;ad+bc)}$$

Et puisque : $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ alors : $ac-2bd \in \mathbb{R}$ et $ad+bc \in \mathbb{R}$ donc : $M_{(a;b)} \times M_{(c;d)} \in E$

E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$

3)soient : $M_{(a;b)} \in E$ et $M_{(c;d)} \in E$

$f\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right) = f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$= ac - 2bd + i(ad+bc)\sqrt{2}$

$f\left(M_{(a;b)}\right) \times f\left(M_{(c;d)}\right) = \left(a + ib\sqrt{2}\right)\left(c + id\sqrt{2}\right)$

$= ac - 2bd + i(ad+bc)\sqrt{2} = f\left(M_{(ac-2bd;ad+bc)}\right)$

$= f\left(M_{(a;b)} \times M_{(c;d)}\right)$

f est un morphisme de ($E - \{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

Soit $x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

On cherche $M_{(a;b)} \in E$ tel que : $f\left(M_{(a;b)}\right) = x + iy$

$f\left(M_{(a;b)}\right) = x + iy \Leftrightarrow a + ib\sqrt{2} = x + iy$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b\sqrt{2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ Existe et il est unique

donc : f est un morphisme bijectif de ($E - \{0_2\}$, $\times$) dans $(\mathbb{C}^*;\times)$

b)($E - \{0_2\}$, $\times$) et $(\mathbb{C}^*;\times)$ sont isomorphes

et $(\mathbb{C}^*;\times)$ un groupe commutatif donc aussi

et on a ($E - \{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

4)La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $M_2(\mathbb{R})$ et E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R});\times)$donc La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Donc on a :

$(E;+)$ est un groupe commutatif et

($E - \{0_2\}$, $\times$) un groupe commutatif

La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans E

Conclusion : $(E;+;\times)$est un corps

Exercice 12: Soit $(A;+;\times)$un anneau.

Et 1_A est l'élément neutre de $(A;\times)$

soient : $a \in A$ et $b \in A$ tels que :

a) $ab+ba=1_A$

b) $a^2b+ba^2=a$

1)montrer que : $a^2b=ba^2$

2)montrer que : $aba+aba=a$

3)en déduire que : $ab=ba$

Solution : 1)on a : $a^2b+ba^2=a$

donc : $a^2b+ba^2=a1_A$

donc : $a^2b+ba^2=a\left(ab+ba\right)$

donc : $a^2b+ba^2=a^2b+aba$

donc : $ba^2=aba\,(1)$

et on a : $a^2b+ba^2=a=1_Aa$

donc : $a^2b+ba^2=\left(ab+ba\right)a$

donc : $a^2b+ba^2=aba+ba^2$

donc : $a^2b=aba\,(2)$

de (1) et (2) en déduit que : $a^2b=ba^2$

2)d'après ce qui précéde on a :

$ba^2=aba$ et $a^2b=aba$

Donc : $aba+aba=a^2b+ba^2$ et d'après b) on a

$aba+aba=a$

3) on a : $(ab)(ab)=abab=(aba)b=(ba^2)b$

$(ba)(ba)=baba=b(aba)=b(a^2b)$

(Car : $aba=a^2b$)

Et on a : $(ab)(ab)=(1_A-ba)(1_A-ba)$

$(ab)(ab)=1_A-ba-ba+(ba)(ba)$

Donc : $ba^2b=1_A-ba-ba+ba^2b$

Car : $(ab)(ab)=(ba)(ba)=ba^2b$

Donc : $ba+ba=1_A$ et puisque : $ba+ab=1_A$

Alors : $ab=ba$

Exercice13: Soit $(K;+;\times)$ un corps.

On note : 1_K l'élément neutre de $(K;\times)$

Soient x et y deux éléments de $K-\{0_K\}$

Qui vérifient les conditions suivantes :

a) $x+y=1_K$ b) $x^{-1}+y^{-1}=1_K$

avec : x^{-1} le symétrique de x pour la loi $\times$

1)montrer que : $xy=yx=-1_K$

2)montrer que : $x^4+y^4=7.1_K$

Avec : $7.1_K=\underbrace{1_K+1_K+...+1_K}_{7\ fois}$

Solution : 1) Soient x et y deux éléments de

$K-\{0_K\}$ on a : $xy=x\left(x^{-1}+y^{-1}\right)y$

$xy=xx^{-1}y+xy^{-1}y=y+x=-1_K$

Donc : $xy=yx=-1_K$

2)on a : $1_K=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$

$1_K=x^2-1_K-1_K+y^2$

Donc : $x^2+y^2=3.1_K$

Donc : $9.1_K=\left(x^2+y^2\right)^2$

Donc : $9.1_K=x^4+x^2y^2+y^2x^2+y^4$

Donc : $9.1_K=x^4+1_K+1_K+y^4$

Donc : $x^4+y^4=7.1_K$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien