SUITES NUMERIQUES

♦ Généralités sur les suites numériques :

- La suite (u_n) est croissante si pour tout $n, u_{n+1} \geq u_n$
- La suite (u_n) est décroissante si pour tout $n, u_{n+1} \leq u_n$
- La suite (u_n) est p- périodique, p entier positif, si pour tout $n, u_{n+p} = u_n$
- Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :

✓ Comparaison de $u_{n+1} - u_n$ à 0

$$Soit\ (u_n)\ est\ une\ suite:$$

$$\begin{cases} Si\ u_{n+1} - u_n \geq 0\ alors\ (u_n)\ est\ croissante \\ Si\ u_{n+1} - u_n \leq 0\ alors\ (u_n)\ est\ décroissante \end{cases}$$

✓ Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

$Soit\ (u_n)\ est\ une\ suite$ à $termes\ strictement\ positifs$:

$$\begin{cases} Si\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1\ alors\ (u_n)\ est\ croissante \\ Si\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1\ alors\ (u_n)\ est\ décroissante \end{cases}$$

- La suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

Suites majorées – suites minorées – suites bornées

- La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n, u_n \leq M$
- La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n, u_n \geq m$
- La suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée
- La suite (u_n) est bornée $\begin{cases} \circ\ Si \text{ pour tout } n, m \leq u_n \leq M \\ \circ\ Si \text{ pour tout } n, |u_n| \leq M \end{cases}$

♦ *Suites arithmétiques :*

La suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$

- Définition :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ ; } r \text{ étant la raison de la suite arithmétique}$$

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 + nr \\ u_n = u_1 + (n-1)r \\ u_n = u_p + (n-p)r \quad \textit{en général} \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs :

$$\begin{cases} \circ\ u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right) \ \textit{en général} \\ \\ \circ\ 1 + 2 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ \textit{en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite arithmétique (u_n) converge si et seulement si sa raison $r = 0$

♦ *Suites géométriques :*

La suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n, u_{n+1} = qu_n$

- Définition :

$u_{n+1} = qu_n$; q étant la raison de la suite géométrique

- Calcul de u_n en fonction de n :

$$\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_n = u_1 \times q^{n-1} \\ u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \textit{en général} \end{cases}$$

- Somme des termes consécutifs : $(q \neq 1)$

$$\begin{cases} \circ\ u_P + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} \ \textit{en général} \\ \circ\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \ \textit{en particulier} \end{cases}$$

- Convergence :

Une suite géométrique(u_n) converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$

♦ *Convergence des suites monotones :*

- Toute suite croissante et majorée converge
- Toute suite décroissante et minorée converge

♦ *Théorèmes de comparaison :*

Théorème 1 :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ v_n \leq u_n \leq w_n \\ \circ\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \\ \circ\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Théorème 1 (bis) :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ |u_n - \ell| \leq v_n \\ \circ\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Théorème 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ u_n \geq v_n \\ \circ\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ u_n \leq w_n \\ \circ\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$