# LES PROBLEMES CLASSIQUES RESOLUS

***Question 38 :***

***Soit $F$ la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ; que représente $F$ pour $f$ ?***

Il suffit d'écrire que $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule-en $a$

***Question 39 :***

***Soit $F$ la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ; montrer que $F$ est dérivable et calculer sa dérivée***

Il suffit d'écrire que $F$ étant la primitive de $f$ qui s'annules-en $a$, alors $F$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$

***Question 40 :***

***Donner une interprétation géométrique de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$***

(sous réserve que $a < b$ et que $\forall\, x \in [a\,;b], f(x) \geq 0$)

Ecrire simplement que $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire en unité d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a \text{ et } x = b$

## Classique 1 :

### Equation différentielle avec second membre $y' + ay = g(x)$

On considère l'équation différentielle $(E)$: $\frac{1}{2}y' + y = e^{-2x}$

1) On pose $u(x) = axe^{-2x}$ où $a$ est un réel.
2) Déterminer le nombre réel$a$pour que la fonction $u: x \longmapsto u(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ soit solution de $(E)$
3) Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$ : $\frac{1}{2}y' + y = 0$
4) Démontrer qu'une fonction $y$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de $(E)$ si et seulement si la fonction $y - u$ est solution de $(E_0)$.
5) En déduire toutes les solutions de $(E)$ puis la solution particulière $f$ de$(E)$, dont la courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point $A(0\,;-1)$

***Résolution***

(1) ***Déterminons le nombre*** $a$

$u$ est solution de $(E)$ si $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$

$$\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x} \Longrightarrow \frac{1}{2}ae^{-2x} = e^{-2x}$$

Par identification $a = 2 \Rightarrow u(x) = 2xe^{-2x}$

(2) ***Résolution de*** $(E_0)$ : $\frac{1}{2}y' + y = 0$

$$\frac{1}{2}y' + y = 0 \Longrightarrow y' = -2y \Longrightarrow y = ke^{-2x}; k \in \mathbb{R}$$

(3) ***Démonstration***

***Supposons que*** $y$ ***est solution de*** $(E)$ ***et montrons que*** $y - u$ ***est solution de*** $(E_0)$

Si $y$ est solution de $(E)$, alors on a $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$ ;

or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(y-u)'(x) + (y-u)(x) = 0$ et donc $y - u$ est solution de $(E_0)$

***Réciproquement, supposons que $y - u$ est solution de $(E_0)$ et montrons que $y$ est solution de $(E)$***

Si $y - u$ est solution de$(E_0)$, alors on a $\frac{1}{2}(y-u)'(x) + (y-u)(x) = 0$ d'où

$\frac{1}{2}y'(x) - \frac{1}{2}u'(x) + y(x) - u(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}u'(x) + u(x)$

Or $\frac{1}{2}u'(x) + u(x) = e^{-2x}$ d'où $\frac{1}{2}y'(x) + y(x) = e^{-2x}$ et donc $y$ est solution de $(E)$

***En conclusion $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $y - u$ est solution de $(E_0)$***

(4) ***Déduction de toutes les solutions de $(E)$***

Soit $y$ une solution de $(E)$, on a d'après (3) et (2), $y(x) - u(x) = ke^{-2x}$ ;d'où

$$y(x) = ke^{-2x} + u(x) \Leftrightarrow y(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x}\ ;\ k \in \mathbb{R}$$

***Solution particulière $f$ de $(E)$***

$f(x) = ke^{-2x} + 2xe^{-2x}$ et $f(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow f(x) = (2x-1)e^{-2x}$

***Commentaires***

- Ces quatre questions sont toutes liées
- Tout candidat sérieux doit être en mesure de reproduire à l'identique le raisonnement du ***classique 1***
- Attention !!! La réciproque dans la **question (3)** n'est pas facultative

## Classique 2 : Etude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$

(1) Etudier les variations de la fonction $f$

(2) Soit $g$ la définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = f(x) - x$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ et que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$

(a) Montrer que pour tout élément$x$ de $I$ , $f(x) \in I$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(b) Montrer que pour tout élément $x$ de $I$ , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

(4) Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$

(b) Montrer que pour tout entier naturel $n$,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

(c) Montrer que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$

(d) Déterminer le plus petit entier$n_0$ pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0, |u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

**On donne :** $\sqrt{e} \simeq 1{,}65$ ;$e \simeq 2{,}72$ ;$\ln 2 = 0{,}69$ et $\ln 10 = 2{,}30$

***Résolution***

(1) Variations de $f$

$f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2}$ ; $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $x - 1 \leq 0$ et $\frac{e^x}{(e^x+x)^2} > 0$ d'où $\frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2} \leq 0$

$\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) \leq 0$ alors $f$ est décroissante

(2) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$

$g'(x) = f'(x) - 1$ ; $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) - 1 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

La fonction $g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$.

Alors réalise une bijection de $[0\,;\,1]$ sur $g([0\,;\,1]) = [g(1)\,;g(0)] = \left[-\frac{1}{e+1}\,;\,1\right]$.

Or $0 \in \left[-\frac{1}{e+1}\,;\,1\right]$ d'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$

Montrons que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{e}-1}{2(\sqrt{e}+1)} \\ g(1) = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} \end{cases} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0 \text{ alors } \alpha \in \left]\frac{1}{2}\,;1\right[$$

(3) On pose $I = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

(a) Montrons que pour tout élément $x$ de $I$ , $f(x) \in I$

$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ car $f$ est décroissante sur $I$

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}+\frac{1}{2}} = 0{,}76$ et $f(1) = \frac{e}{e+1} = 0{,}73$ d'où

$\frac{1}{2} \leq 0{,}73 \leq f(x) \leq 0{,}76 \leq 1$ et donc $f(x) \in I$

(b) Montrer que pour tout élément $x$ de $I$ , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$x \in I \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} \leq e^x \leq e$ et $0 \leq -(x-1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ $et$ $\sqrt{e} \leq e^x \leq e \Leftrightarrow \sqrt{e} + \frac{1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{e} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (e^x + x)^2 \leq (e+1)^2$

$\frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x+x)^2} \leq \frac{1}{\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\right)^2}$ et $0 \leq -(x-1)e^x \leq \frac{e}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e}+\frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{e}{2\left(\sqrt{e}\right)^2}$

On a alors $0 \leq -f'(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow |0| \leq |f'(x)| \leq \left|-\frac{1}{2}\right|$

et donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

(c) Montrer que pour tout élément $x$ de $I$ , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

$\alpha \in I$ et $\forall\, x \in I,\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$\left|\int_\alpha^x f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ d'où $|[f'(t)]_\alpha^x| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha| \Leftrightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ d'où $\forall\, x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

(4) Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) Montrons que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} \in I = \left[\frac{1}{2}\ ; 1\right]$

Supposons que pour tout entier naturel $n, u_n \in I$ et montrons que $u_{n+1} \in I$

Si $u_n \in I$, alors $f(u_n) = u_{n+1} \in I$ car d'après (3a) : $\forall\, x \in I, f(x) \in I$

Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel $n, u_n \in I$

(b) Démonstrations

✓ Montrons que pour tout entier naturel $n, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ ; posons $x = u_n$ dans (3c) : On a

$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

**Autre façon de faire**

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ ; $\alpha \in I$ et $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors d'après l'inégalité de la moyenne, on a :$\left|\int_{\alpha}^{u_n} f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ d'où $\left|[f'(t)]_{\alpha}^{u_n}\right| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

$\Leftrightarrow |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. Or d'après (2), $f(\alpha) = \alpha$ et par définition

$f(u_n) = u_{n+1}$ d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

✓ Montrons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

**Raisonnement par récurrence**

Pour $n = 0, |u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right|$ ; $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$

$$\Rightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

Supposons que pour tout entier naturel $n, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et montrons que

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion : par récurrence, $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

**Autre façon de faire**

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$; d'où :

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha|$$
$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_1 - \alpha|$$
$$|u_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_2 - \alpha|$$
$$\vdots$$
$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$$

Le produit membre à membre donne après simplification :

$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \alpha \leq 0$

$\Rightarrow |0| \leq \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$ et donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(c) Montrons que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$

$\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$

La suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0 et donc la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

(d) Déterminons le plus petit entier $n_0$ pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ donc aura $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 10^{-3} \Rightarrow -(n+1)\ln 2 \leq -3\ln 10 \Rightarrow n \geq \frac{3\ln 10}{\ln 2} - 1$

$\Rightarrow n \geq 9$ et donc $n_0 = 9$.

**Commentaires : Faire le même raisonnement pour les questions :**

- ✓ Déterminer le plus petit entier $n_0$ pour lequel $u_{n_0}$ est une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près
- ✓ Déterminer le plus petit entier $n_0$ pour lequel l'on a pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

## *Problème de Synthèse 2*

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de$f$ dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ du plan d'unité graphique 4 $cm$.

**PARTIE A**

1. Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation
3. a. Montrer la droite $(\Delta)$ la droite d'équation $y = x - \ln 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de $f$
   b. Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\Delta)$
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$
   et justifier que $\alpha \in \left[1\,;\,\frac{5}{4}\right]$
5. Tracer$(\mathcal{C})$ et $(\Delta)$
6. Soit $t$ un réel compris entre 0 et 1
   a. Calculer $\mathcal{A}(t)$en unité d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\Delta)$ et
      les droites d'équations $x = t$ et $x = \frac{e^2-1}{2}$.
      (On pourra s'aider d'une intégration par parties)

b. Déterminer $\lim\limits_{t \to 0^+} \mathcal{A}(t)$

7. Montrer que $\alpha$ est solution de l'équation $(2x+1)e^{-x} = x$

**PARTIE B**

On nomme $g$ la fonction définie sur $I = \left[1\,;\, \frac{5}{4}\right]$ par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$

1. Etudier les variations de $g$
   En déduire que pour tout $x$ élément de $I$, $g(x) \in I$
2. Monter pour tout $x$ élément de $I$, $|g'(x)| \leq \frac{3}{5}$ et que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{5}|x - \alpha|$
3. Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$
   a. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \in I$
   b. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5}|u_n - \alpha|$
   c. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n$
   En déduire que $(u_n)$ est convergente et donner sa limite
   d. Déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ pour que $u_{n_0}$ soit une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

**On donne :** $\ln 2 = 0{,}70$ ; $\ln 3 = 1{,}09$ ; $\ln 5 = 1{,}60$ ; $\ln 7 = 1{,}94$ ;
$e^{-1} = 0{,}37$ ; $e^{-1{,}25} = 0{,}2$