NOMBRES COMPLEXES

♦ *Les différentes formes d'un nombre complexe :*

Soient $(a , b , \theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$		
Forme algébrique	**Forme trigonométrique**	**Forme exponentielle**
$z = a + ib$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$
$a = \Re e(z)$ et $b = \Im m(z)$	$r = \|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta = arg(z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}$	

♦ *Egalité de deux nombres complexes :*

Avec les formes algébriques $\boldsymbol{z = a + ib}$ **et** $\boldsymbol{z' = a' + ib'}$	**Avec les formes exponentielles** $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ **et** $\boldsymbol{z' = r'e^{i\theta'}}$
$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$ **En particulier :** $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$	$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

♦ Conjugué d'un nombre complexe :

	Propriétés	
	Soit $z \in \mathbb{C}$	**Soient Soit z et$z' \in \mathbb{C}$**
• $z = a + ib \Leftrightarrow \bar{z} = a - ib$ • $z = re^{i\theta} \Leftrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$	• $z + \bar{z} = 2\Re e(z)$ • $z - \bar{z} = 2\Im m(z)$ • $z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$ • $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$si $z \neq 0$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n \; \forall\, n \in \mathbb{Z}$	• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ • $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$ • $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ si $z' \neq 0$

♦ Module d'un nombre complexe :

Propriétés		
• $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ • $\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	• $\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$ et $\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$ • $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	• $\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ *avec* $z' \neq 0$ • $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n \; \forall\, n \in \mathbb{Z}$

♦ Arguments :

Si z et z′ sont deux nombres complexes non nuls, alors :	
• $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$ • $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$	• $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$ • $arg(z^n) = narg(z)$

♦ Formules d'Euler et Formule de Moivre :

Formules d'Euler	$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre	$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ou $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

♦ *Equation du second degré* $az^2 + bz + c = 0$:

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	
Δ est un réel	Si $\Delta \geq 0$ alors $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	Si $\Delta < 0$ alors $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
Δ n'est pas un réel	Pour $\delta = x + iy, \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$ Et alors $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

♦ *Interprétation géométrique :*

Soient M et M' deux points du plan complexe d'affixes respectives z et z'
• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est z ; la distance $OM = \|z\|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = arg(z)$ • M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow \|z\| = 1$ • M appartient à l'axe des réels $(O, \vec{u}) \Leftrightarrow arg(z) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $z = 0$ • M appartient à l'axe des imaginaires $(O, \vec{v}) \Leftrightarrow arg(z) = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ • L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$ et la distance $MM' = \|z' - z\|$ • L'affixe du milieu de $[MM']$ est $\frac{z + z'}{2}$
Soient A , B , C et D des points du plan complexe
• L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est $\frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ • L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ • $\|z_B - z_A\| = AB$ et $arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ • $\left\|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right\| = \frac{CD}{AB}$ et $arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

♦ Caractérisation de configurations et de figures :

- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \; ou \; \pi \Leftrightarrow (AB) \parallel (CD)$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A
- $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow ABC$ est isocèle de sommet A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ABC$ est rectangle isocèle en A
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow ABC$ est équilatéral

♦ Caractérisation d'ensemble de points :

L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tel que
• $\lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$ est la médiatrice du segment$[AB]$ • $\lvert z - z_A\rvert = r$ est le cercle de centre A et de rayon r • $arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ est la demi-droite d'origine A dirigée par le vecteur $\vec{\omega}$ tel que $(\vec{u}\,, \vec{\omega}) = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel est la droite(AB) privée de A • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soitun réel strictement négatif est le segment$[AB]$ privée de A et B • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soitun réel strictement positif est la droite (AB) privée du segment $[AB]$ • $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B