CALCUL DE LIMITES ET CONTINUITE

CALCUL DE LIMITES

- ***Formes indéterminées :***

$\infty - \infty$	$\mathbf{0} \times \infty$
$\left.\begin{array}{l} f(x) = u(x) + v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$	$\left.\begin{array}{l} f(x) = u(x)v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$
$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \pm\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$	$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\ est\ une\ FI$

♦ Limite d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle :

- **Règle 1 :** en $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré

- **Règle 2 :** en $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur par le monôme de plus haut degré du dénominateur

♦ Limite de la composée de deux fonctions :

$$\left.\begin{array}{l} \circ\ f(x) = v \circ u(x) \\ \\ \circ\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = b \\ \\ \circ\ \lim\limits_{x \to b} v(x) = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

♦ *Limite des fonctions trigonométriques :*

NB : En $\pm\infty$, les fonctions cosinus et sinus n'admettent pas de limite	
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$	$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t} = 0$
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\tan t}{t} = 1$	$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$

♦ *Théorèmes de comparaison :*

- **Théorème 1 :** au voisinage de $+\infty$

  Si $f(x) \geq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  Si $f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

- **Théorème 2 :** au voisinage de $+\infty$,

  Si $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

- **Théorème 3 :** Théorème des gendarmes : au voisinage de $+\infty$,

  Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

♦ *Asymptotes et Branches infinies :*

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$,alors,$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite (Δ): $y = ax$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b \in \mathbb{R}$, alors, $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

♦ *Les éléments de symétrie d'une fonction :*

- f est paire si et seulement si $\forall\, x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f\,(x)$
- f est impaire si et seulement si $\forall\, x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de$\left(\mathcal{C}_f\right)$ si et seulement si
  $\forall\, x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$
- $I(a\,, b)$ est un centre de symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ si et seulement si
  $\forall\, x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

CONTINUITE

♦ *Etude de la continuité en un point :*

f est continue en x_0,

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

♦ *Théorème de continuité :*

- Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0
- Toute fonction dérivable sur I est continue sur I

NB : La réciproque est fausse, une fonction continue n'est pas toujours dérivable

♦ *Exemples de fonctions continues :*

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition
- Les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction racine carrées est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$
- La somme ou le produit de fonctions continues est continue

- ***Quelques résultats utiles :***

$\forall\, k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases}\cos(k\pi) = (-1)^k \\ \sin(k\pi) = 0\end{cases}$	$\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0\end{cases}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{Z},$	$\begin{cases}\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x \\ \sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x\end{cases}$	$\begin{cases}\cos(k\pi - x) = (-1)^k \cos x \\ \sin(k\pi - x) = -(-1)^k \sin x\end{cases}$