

**FONCTIONS
LOGARITHME NEPERIEN ET
EXPONENTIELLE**

◆ *Définition et première propriétés :*

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\ln$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1 • $D_{\ln} =]0 ; +\infty[$ • $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ • $\forall x \in]0 ; 1[, \ln x < 0$ et $\forall x \in]1 ; +\infty[, \ln x > 0$ • $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$	• $\exp$ ou $x \mapsto e^x$ est la bijection réciproque de $\ln$ • $D_{\exp} = \mathbb{R}$ • $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ • $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ • $\forall x \in]0 ; +\infty[, e^{\ln x} = x$

◆ *Propriétés algébriques :*

Logarithme népérien	Exponentielle
$\forall a \in]0 ; +\infty[$ et $\forall b \in]0 ; +\infty[$ on a : • $\ln ab = \ln a + \ln b$ • $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ • $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ • $\forall r \in \mathbb{R}, \ln a^r = r \ln a$ • $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ • $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$	$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$ on a : • $e^{a+b} = e^a e^b$ • $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ • $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ • $\forall r \in \mathbb{R}, (e^a)^r = e^{ar}$ • $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ • $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

♦ *Limites utiles :*

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ • $\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow -\infty} x ^r e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

♦ *Bijection continue :*

- f continue sur I
 - f strictement monotone sur I
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J$$

♦ *Solution de l'équation $f(x) = k$*

- f continue sur I
 - f strictement monotone sur I
 - $k \in J = f(I)$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ continue sur } I \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } I \\ \circ k \in J = f(I) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = k \text{ admet une unique solution } \alpha \in I$$

♦ *Théorème des valeurs intermédiaires :*

Résolution de l'équation $f(x) = 0$:

- f est continue sur $[a, b]$
 - f strictement monotone sur $[a, b]$
 - $f(a) \times f(b) < 0$
- $$\left. \begin{array}{l} \circ f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \circ f \text{ strictement monotone sur } [a, b] \\ \circ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in]a, b[$$