# DERIVATION ET NOTION DE PRIMITIVES

# DERIVATION

♦ *Etude de la dérivabilité en un point :*

<table>
<tr><td colspan="2">$f$ est dérivable en un point $x_0$, s'il existe un réel $\ell$ tel que :</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$</td><td>ou<br>$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$</td></tr>
<tr><td>ou encore $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ell = f'(x_0)$ est alors appelé nombre dérivé de $f$ en $x_0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\left.\begin{array}{l} \circ \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_1 \\ \circ \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_2 \\ \circ \quad \ell_1 \neq \ell_2 \end{array}\right\}$ ou $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \Longrightarrow f\ n'estpas\ dérivable\ en\ x_0$</td></tr>
</table>

## ♦ Fonctions dérivées usuelles :

| $f'$ désigne la fonction dérivée de $f$ sur $I$ | | |
|---|---|---|
| **Fonction** | **Dérivée** | $I$ |
| $f(x) = k$ $(k \text{ réel})$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ | $]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n} (n \geq 2)$ | $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;\,+\infty[$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \sin x$ | $f'(x) = \cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \tan x$ | $f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$ |
| $f(x) = \ln x$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ | $]0\,;\,+\infty[$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ | $\mathbb{R}$ |

## ♦ *Transformations du plan :*

| $M$ **est le point d'affixe** $z$ **et** $M'$ **est le point d'affixe** $z'$ |
|---|
| • **Translation :** $M'$ est l'image de $M$ par la translation de vecteur $\vec{\omega}$ si et seulement si $z' = z + z_{\vec{\omega}}$<br><br>• **Rotation de centre $A$ :** $M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\theta$ si et seulement $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$<br><br>• **Rotation de centre $O$ :** $M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ si et seulement $z' = e^{i\theta}z$<br><br>• **Homothétie :** $M'$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $A$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement $z' - z_A = k(z - z_A)$<br><br>• **Similitude :** $M'$ est l'image de $M$ par la similitude de centre $A$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ si et seulement $z' - z_A = ke^{i\theta}(z - z_A)$ |