COURBES PARAMETREES DU PLAN

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On veut étudier la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = f(t) \\ \\ y(t) = g(t) \end{cases} ; t \in I$$

- ***Equation cartésienne :***

En posant $x = x(t)$ et $y = y(t)$; l'équation obtenue en éliminant (si possible) la variable t entre x et y est appelée équation cartésienne de la courbe (Γ)

♦ *Comparaison de $M(t)$ et $M(u(t))$:*

On note $M(t)\ (x(t)\ ;\ y(t))$ et donc $M(u(t))\ (x(u(t))\ ;\ y(u(t)))$

$t \mapsto u(t)$ étant une fonction de t ; comparons $M(t)$ et $M(u(t))$	
Résultat	**Conclusion**
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t) = M(u(t))$
$\begin{cases} x(u(t)) = x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
$\begin{cases} x(u(t)) = -x(t) \\ y(u(t)) = -y(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère
$\begin{cases} x(u(t)) = y(t) \\ y(u(t)) = x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
$\begin{cases} x(u(t)) = -y(t) \\ y(u(t)) = -x(t) \end{cases}$	$M(t)$ et $M(u(t))$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = -x$

♦ Réduction de l'intervalle d'étude :

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M(t+p)}$:**

$\begin{cases} x(t+p) = x(t) \\ y(t+p) = y(t) \end{cases} \Leftrightarrow M(t) = M(t+p) \ \Leftrightarrow x$ et y sont de période commune p

Une étude sur un intervalle de longueur p permet de tracer complètement (Γ)

- **Comparaison de $\boldsymbol{M(t)}$ et $\boldsymbol{M(-t)}$:**

✓ L'intervalle $\left[-\frac{p}{2}\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ est de longueur p

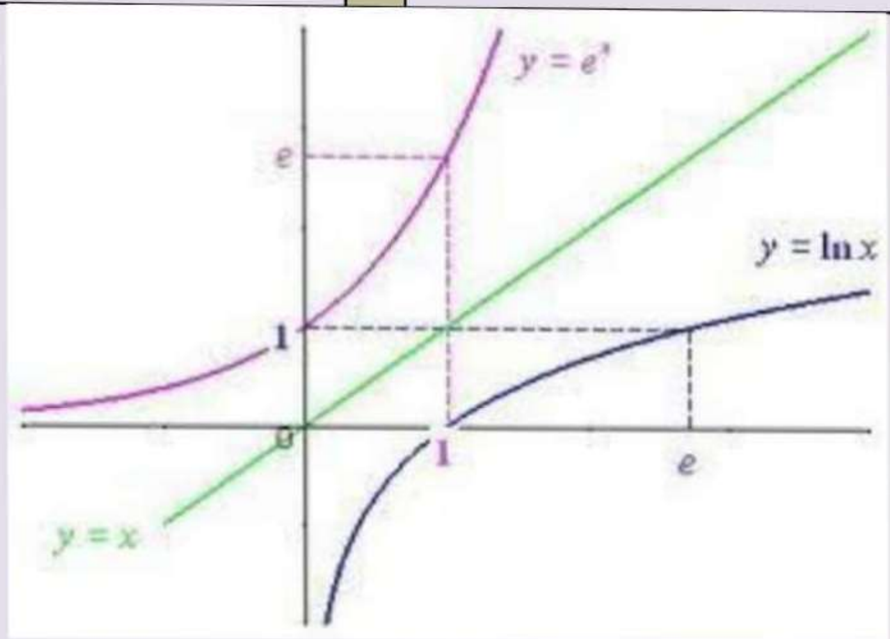
✓ $\left[-\frac{p}{2}\ ;\ \frac{p}{2}\right] = \left[-\frac{p}{2}\ ;\ 0\right] \cup \left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ et $\forall\, t \in \left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right], -t \in \left[-\frac{p}{2}\ ;\ 0\right]$

✓ $M(-t) = S_{(?)}\big(M(t)\big)$

Conclusion : On a $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup S_{(?)}(\Gamma_0)$ où (Γ_0) est l'arc de (Γ) correspondant à $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$ donc on peut restreindre le domaine d'étude à $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$

♦ Dérivées et représentations graphiques :

Logarithme népérien	Exponentielle
• $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,, \ln' x = \frac{1}{x}$ • $[\ln u(x)]' = [\ln\|u(x)\|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$	• $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$ • $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$



Problème de Synthèse (2h)

On considère la fonction numérique f de la variable x, définie par : $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{|x|}$

On désigne $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 + \ln(-x)\ \ si\ x < 0 \\ g(x) = x^2 + 1 - \ln x\ \ si\ x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations
2. Calculer $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $g(-1)$
3. Etudier le signe de $g(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$

PARTIE B

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.

En déduire une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.

2. Montrer que la droite $(\Delta): y = x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ de f et étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Δ)
3. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variation sur D_f
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
   Justifier l'encadrement $0,6 < \alpha < 0,7$.
5. Tracer (Δ)et $(\mathcal{C})$
6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, du nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = m$ où m est un paramètre réel.

PARTIE C

1. On désigne par φ la restriction de f à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
   a. Montrer que φ définie une bijection de $]0\,;\,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser
   b. Dresser le tableau de variation de la réciproque φ^{-1} de φ puis tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2du domaine plan limité par la courbe$(\mathcal{C})$, la droite (Δ) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = e$.
   Prouver que $\mathcal{A} = 2(1 - \alpha^4)$

On donne : $\ln(0,6) = -\,0,51$ et $\ln(0,7) = -\,0,35$