Examen blanc

Sujet N ° 9

Matière : Mathématiques — Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024 — Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 2	Calcul intégral	02 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Nombres complexes	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique et suites numériques	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : trois boules rouges, deux boules vertes et une boule noire.
On tire au hasard successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On considère les deux événements suivants :

- A : « Tirer deux boules vertes »
- B : « Tirer deux boules de même couleur »

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{9}$ et $p(B)=\dfrac{7}{18}$ **1pt+1pt**

2)- Dans cette question, on rajoute n boules vertes dans l'urne précédente.

a)- Exprimer $p(A)$ en fonction de n **0,5pt**

b)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour que $p(A)>\dfrac{1}{4}$ **0,5pt**

Exercice 2 (2 points)

On pose : $I=\int_0^1 x(2+\cos x)e^{1-x}\,dx$

1)- Montrer que $e^{1-x}\leq(2+\cos x)e^{1-x}\leq 3e^{1-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,25pt**

2)- En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^{1-x}\,dx$ **0,5pt**

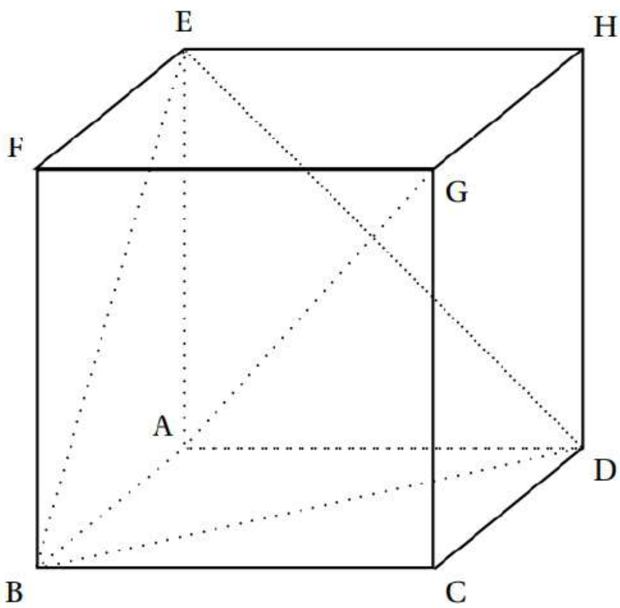
3)- En déduire que $e-2\leq I\leq 3(e-2)$ **0,5pt**

4)- a)- Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \dfrac{1}{2}\left((x+1)\sin x - x\cos x\right)e^{1-x}$ est une primitive de $h: x\mapsto x\cos(x)e^{1-x}$ sur $\mathbb{R}$ **0,25pt**

b)- Déterminer la valeur exacte de l'intégrale I **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et on munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



1)- a)- Vérifier que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE) **0,5pt**

b)- En déduire que $x+y+z-1=0$ est une équation cartésienne du plan (BDE) **0,5pt**

2)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG) **0,25pt**

3)- Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AG]$, puis calculer $d(I,(BDE))$ **2 x 0,25pt**

4)- Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{GM} = 0$

a)- Déterminer la nature de l'ensemble (S) et préciser ses éléments caractéristiques. **0,5pt**

b)- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$ est une équation cartésienne de (S) **0,25pt**

c)- Montrer que le plan (BDE) coupe (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$, dont on déterminera son centre et son rayon. **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 3 - i$ et $b = 11 - i$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la transformation h définie par : $z' = (1 - 4m + (1+m)i)z - 4 + 4i$, où m est un nombre réel

1)- Déterminer la valeur de m pour que h soit une homothétie. Préciser alors le centre Ω et le rapport k de cette homothétie. **0,5pt + 2 x 0,25pt**

2)- a)- Vérifier que le point B est l'image du point A par l'homothétie h **0,5pt**

b)- En déduire que les points Ω, A et B sont alignés. **0,5pt**

3)- Déterminer l'affixe du point C image du point O par la translation de vecteur $\vec{u} + 2\vec{v}$ **0,5pt**

4)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\bar{z} - 1 + 2i| = 2$ **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + e^x$

1)- Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

2)- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ telle que $-1 < \alpha < 0$ **1pt**

3)- En déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des deux intervalles $[\alpha, +\infty[$ et $]-\infty, \alpha]$ **2 x 0,25pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $2cm$)

1)- Vérifier que $D_f =]\alpha, +\infty[$ **0,5pt**

2)- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,25pt**

3)- a)- Montrer que $f(x) = \ln(g(x)) - x$ pour tout x de D_f **0,25pt**

b)- Calculer la limite $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat. **2 x 0,25pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = \dfrac{1-x}{g(x)}$ pour tout x de D_f **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

5)- Montrer que le point O est le seul point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses. **0,5pt**

6)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point O **0,5pt**

7)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On prendra* $\alpha \approx -0,5$ *et on admet qu'il existe un unique point d'inflexion de* $(\mathscr{C}_f)$ *d'abscisse comprise entre* $2,1$ *et* $2,2$) **1pt**

8)- Déterminer graphiquement, la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (T) **0,5pt**

Partie III :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,5pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **0,5pt + 0,25pt**

3)- Calculer la limite de la suite (u_n) **0,5pt**