Examen blanc

Sujet N ° 8

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 22$ et $u_{n+1} = \frac{1}{\ln 3} u_n - \frac{24(1-\ln 3)}{\ln 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 24 **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **2x0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = 24 - u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison. **0,25pt**

b)- Déterminer le terme général de la suite (v_n) **0,25pt**

c)- En déduire que : $u_n = 24 - 2\left(\frac{1}{\ln 3}\right)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer $\lim u_n$ **2x0,25pt**

4)- On considère la suite numérique (w_n) définie par : $w_n = (1+u_n)e^{23-u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

Calculer $\lim w_n$ **0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, -1)$ et $B(3, 2, 5)$,

et l'ensemble (P) des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$

1)- a)- Vérifier que le point O appartient à l'ensemble (P), puis montrer que (P) est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ **2x0,5pt**

b)- En déduire que $x + y + 3z = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) **0,5pt**

2)- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P) **0,25pt**

3)- Soit (S) la sphère de centre A telle que (P) est un plan tangent à cette sphère.

a)- Calculer le rayon de la sphère (S) **0,25pt**

b)- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + \frac{18}{11} = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) **0,5pt**

c)- Déterminer le point d'intersection du plan (P) et la sphère (S) **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$ **0,5pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = 3 + i\sqrt{3}$

a)- Vérifier que $b - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - a)$ **0,5pt**

b)- En déduire la nature du triangle ABC **0,5pt**

c)- Déterminer g l'affixe du point G le centre de gravité du triangle ABC **0,5pt**

d)- Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|3\bar{z} - 6 + 2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges portant les nombres -1 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2, quatre boules vertes portant les nombres -1 ; 1 ; 2 ; 2 et une boule jaune porte le nombre 1

On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

On note le nombre porté par la première boule par a, le nombre porté par la deuxième boule par b et le nombre porté par la troisième boule par c

On considère les événements suivants :

- A : « les trois boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux »
- B : « le produit abc est strictement positif »
- C : « le point $M(a, b, c)$ n'appartient pas au plan (P) d'équation $x + y + z - 2 = 0$ »

1)- Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ **2x0,5pt+0,75pt**

2)- Sachant que les boules tirées sont de couleurs différentes deux à deux, calculer la probabilité que l'événement B est réalisé. **0,75pt**

3)- On répète cette expérience trois fois en remettant dans les urnes les trois boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement deux fois ? **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2x\ln x$

1)- Calculer $g(1)$, puis vérifier que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1$ **2x0,25pt**

2)- Montrer que : $g'(x) = 3 + 2\ln x$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g **2x0,5pt**

3)- En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$, et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$ **2x0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = (x-1)\sqrt{|\ln x|}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1{,}5cm$).

1)- Vérifier que : $D_f =]0,+\infty[$, puis calculer $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **3x0,25pt**

2)- Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,25pt**

3)- a)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ **0,5pt**

b)- En déduire une branche infinie à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,25pt**

4)- Étudier la dérivabilité de f en 1, puis interpréter graphiquement le résultat. **0,5pt +0,25pt**

5)- a)- Montrer que : $f'(x) = \dfrac{|g(x)|}{2x\sqrt{|\ln x|}}$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ **1pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

6)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **1pt**

7)- a)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,75pt**

b)- Construire dans le repère précédent $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h définie par :

$h(x) = f^{-1}(|x|)$ **0,5pt**