Examen blanc

Sujet N ° 7

Matière : Mathématiques **Classe :** 2 Bac SVT&SP

Année scolaire : 2023/2024 **Durée :** 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- a)- Vérifier que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déduire la monotonie de (u_n) **2x0,25pt**

b)- En déduire que la suite (u_n) est convergente. **0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2 **0,25pt**

b)- Écrire v_n en fonction de n **0,25pt**

4)- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$

a)- Montrer que : $S_n = 2^{n+1} + n - 2$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ **0,25pt**

b)- Calculer $\lim \frac{S_n}{n.2^n}$ **0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(1, 2, 3)$ et le plan (P) d'équation $x + y + z - 3 = 0$

1)- Vérifier que : $d(A,(P)) = \sqrt{3}$ **0,25pt**

2)- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire au plan (P) **0,5pt**

3)- Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P) **0,5pt**

4)- Soit (S) la sphère de centre A et qui coupe le plan (P) selon le cercle (Γ) de rayon $r = 2$

a)- Quel est le centre du cercle (Γ) ? **0,25pt**

b)- Vérifier que le rayon de la sphère (S) est $R = \sqrt{7}$, puis déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) **0,25pt + 0,5pt**

5)- Soit (Q_m) le plan d'équation $x - y + mz + 1 = 0$, où m est un réel positif.

Déterminer la valeur de m pour que le plan (Q_m) soit tangent à la sphère (S) **0,75pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z\sqrt{3} + 9 = 0$ **0,75pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2\left(\sqrt{3} + i\right)$, $b = \overline{a}$ et $c = -8i$

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et soit D l'image du point C par la rotation R

a)- Écrire a sous forme trigonométrique, puis déduire un argument de $\frac{a}{b}$ **0,5pt+0,25pt**

b)- Montrer que le triangle OAB est équilatéral. **0,5pt**

c)- Donner l'expression complexe de la rotation R **0,5pt**

d)- Montrer que le point A est le milieu du segment $[OD]$ **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher : cinq boules vertes portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 et cinq boules rouges portant les nombres 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3.

On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules du sac.

On considère les événements suivants :

- A : « Tirer trois boules portent le même nombre »
- B : « Tirer exactement deux boules de même couleur parmi trois boules tirées »
- C : « Tirer trois boules portent des nombres de même parité »

1)- a)- Montrer que : $p(A)=\frac{7}{40}$, $p(B)=\frac{5}{6}$ et $p(A\cap B)=\frac{2}{15}$ **3x0,5pt**

b)- En déduire que : $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{8}$ *(Remarquer que $\overline{A}\cap\overline{B}$ est l'événement contraire de $A\cup B$)* **0,5pt**

2)- Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse. **0,5pt**

3)- Calculer $p(C)$ **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x)=2x+(x-1)\ln(x-1)$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $]1,+\infty[$

x	1		$1+\frac{1}{e^3}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$\searrow$	$g\left(1+\frac{1}{e^3}\right)$	$\nearrow$	

1)- Vérifier que : $g\left(1+\frac{1}{e^3}\right)=2-\frac{1}{e^3}$, puis déduire le signe de $g\left(1+\frac{1}{e^3}\right)$ sachant que : $\frac{1}{e^3}\approx 0,04$ **2x0,25pt**

2)- En déduire, à partir du tableau ci-dessus, le signe de la fonction g est strictement positive sur $]1,+\infty[$ **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\ln(x-1)$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat **0,5pt +0,25pt**

2)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in\,]1,+\infty[$ **2x0,25pt**

b)- Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ (*on pourra poser* $t=\sqrt{x}$), puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **0,5pt+0,25pt**

c)- En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction à déterminer **0,25pt**

3)- a)- Montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2(x-1)\sqrt{x}}$ pour tout $x\in\,]1,+\infty[$ **0,5pt**

b)- En déduire que f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera **0,5pt**

5)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point A **0,25pt**

6)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ **1pt**

Partie III :

1)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0, puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ **2x0,5pt**

3)- Construire, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction f^{-1} **0,5pt**

4)- Déterminer graphiquement les deux limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x}$ **2x0,5pt**