Examen blanc

Sujet N ° 6

Matière : Mathématiques **Classe :** 2 Bac SVT&SP

Année scolaire : 2023/2024 **Durée :** 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Questions indépendantes	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique et suites numériques	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

1)- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x-\ln(2e^{x}+1)\leq 0$ **0,5pt**

2)- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} e^{x}-2e^{y}=1 \\ x-y=\ln 3 \end{cases}$ **0,5pt**

3)- a)- Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \cos x + x\sin x$ est une primitive de $h: x\mapsto x\cos x$ sur $\mathbb{R}$ **0,25pt**

b)- Montrer que : $\dfrac{x}{1+x\tan x}=\dfrac{x\cos x}{\cos x + x\sin x}$, pour tout x de l'intervalle $[-1,1]$ **0,25pt**

c)- En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x\tan x}dx$ **0,5pt**

Exercice 2 (3 points)

1)- On pose : $Z=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)(1+i)$

a)- Écrire Z sous forme trigonométrique **0,5pt**

b)- Montrer que Z^4 est un réel négatif **0,5pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$, $b=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(1+i)$ et $c=\overline{b}$

a)- Montrer que : $c-a=i(b-a)$, puis déduire la nature du triangle ABC **0,5pt + 0,25pt**

b)- Vérifier que : $a=b+c$ **0,25pt**

c)- En déduire la nature du quadrilatère $ABOC$ **0,5pt**

d)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z}|=\left|z-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)(1-i)\right|$ **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

On considère une urne contenant trois boules rouges et une boule verte (Les boules sont indiscernables au toucher), ainsi qu'un jeton parfaitement équilibré dont l'une des faces est rouge et l'autre est verte.

Une épreuve consiste à lancer le jeton : si la face supérieure est rouge, on ajoute une boule rouge dans l'urne ; si la face supérieure est verte, on ajoute une boule verte dans l'urne. Puis, on tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

On considère les deux événements suivants :

- A : " Aucune boule verte ne figure parmi les trois boules tirées "
- B : " La face supérieure du jeton est verte "

1)- a)- Montrer que : $p(B)=\dfrac{1}{2}$, $p(A/B)=\dfrac{1}{10}$ et $p(A/\overline{B})=\dfrac{2}{5}$ **0,25pt + 2 x 0,75pt**

b)- En utilisant la formule des probabilités totales, déduire la probabilité de l'événement A **0,5pt**

2)- Sachant qu'aucune boule verte ne figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la face supérieure du jeton soit rouge. **0,75pt**

Exercice 4 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $A(-1, 1, 3)$ et le plan (P) d'équation $2y+z+1=0$.

Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1 \\ y=1+2t \\ z=3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

1)- Calculer la distance $d(A,(P))$ **0,25pt**

2)- Déterminer le triplet des coordonnées du point H intersection de la droite (D) et le plan (P) **0,25pt**

3)- On considère la sphère (S) de centre A et de rayon $R=3$

a)- Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle $(\mathscr{C})$ dont on déterminera son centre et son rayon. **1pt**

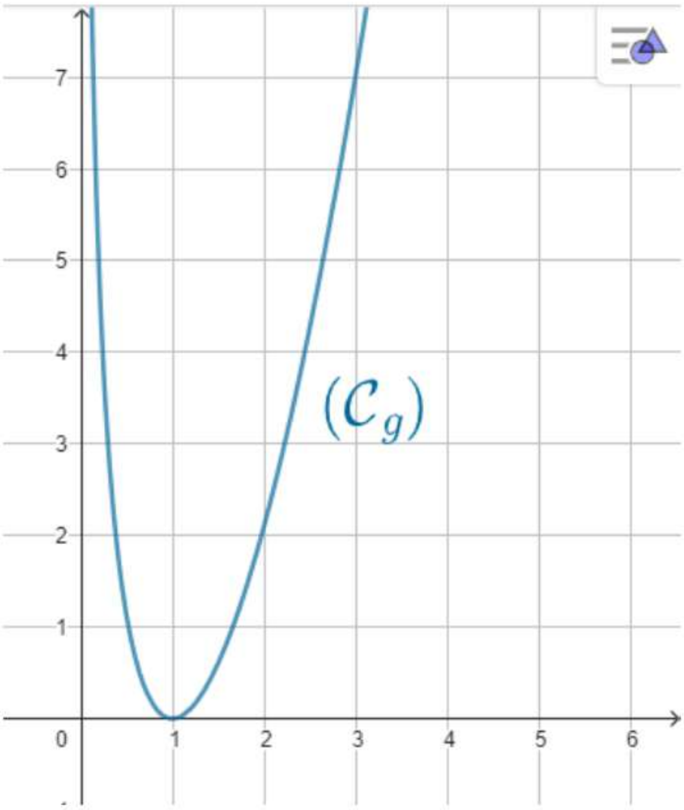
b)- Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S') de même centre que la sphère (S) et tangent au plan (P) **0,5pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2+\ln^2(x)-2\ln x-1$

On considère ci-dessous la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.



1)- Calculer $g(1)$ **0,25pt**

2)- Déterminer graphiquement le signe de la fonction g **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}-\frac{\ln^2(x)}{x}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat **0,5pt + 0,25pt**

2)- a)- Montrer que : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x} = 0$ (*on pourra poser* $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ **0,5pt + 0,25pt**

b)- Montrer que la droite (*D*) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,5pt**

c)- Vérifier que $f(x) - x = \frac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, puis étudier la position relative de la droite (*D*) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ **0,25pt + 0,5pt**

3)- a)- Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ **0,5pt**

b)- Calculer $f'(1)$, puis interpréter géométriquement le résultat. **2 x 0,25pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0,25pt**

4)- a)- Montrer que $f''(x) = \frac{2\ln x(3-\ln x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ **0,5pt**

b)- En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ possède deux points d'inflexion *I* et *J* d'abscisses respectives 1 et e^3 **0,5pt**

5)- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ telle que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$ **0,75pt**

6)- Construire la droite (*D*) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (*La construction du point J n'est pas demandée et on prendra* $\alpha \approx 0,3$) **0,75pt**

7)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

Partie III :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $e^{-1} \le u_n \le e$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **0,5pt + 0,25pt**

3)- Calculer la limite de la suite (u_n) **0,25pt**