Examen blanc

Sujet N ° 5

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 4	Géométrie dans l'espace	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{e^3}\left(u_n + e^3 - 1\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est minorée par 1 **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente. **2x0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = u_n - 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison. **0,25pt**

b)- Déterminer le terme général de la suite (v_n) **0,25pt**

c)- En déduire que : $u_n = 1 + \frac{1}{e^{3n}}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

4)- Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

a)- Exprimer S_n en fonction de n **0,25pt**

b)- Montrer que : $\lim \frac{S_n}{n} = 1$ **0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation : (E) : $z^2 - 2z\cos\frac{\pi}{8} + 1 = 0$

1)- a)- Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$ **0,25pt**

b)- En déduire les soutions de l'équation (E) **0,5pt**

2)- On pose : $a = \cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}$

a)- Écrire a sous forme trigonométrique **0,25pt**

b)- Montrer que le nombre a^4 est imaginaire pur. **0,5pt**

3)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a^2 et $b = 1 - i$

a)- Vérifier que $\sqrt{2}\, a^2 = b$, puis en déduire que les points O, A et B sont alignés. **2x0,5pt**

b)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|\frac{z}{a} - a\sqrt{2}\right| = 3$ **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

On dispose d'un dé cubique équilibré (non truqué) dont les faces portent les nombres suivants :

$$-1 \;;\; -1 \;;\; -1 \;;\; 0 \;;\; 1 \;;\; 1$$

On lance ce dé deux fois de suite et on note le nombre obtenu pour chaque lancer.
On considère les événements suivants :

- A : « Les deux nombres obtenus sont différents »
- B : « La somme des deux nombres obtenus est nulle »
- C : « Les deux nombres obtenus sont différents sachant que leur somme est nulle »

1)- a)- Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ **2x0,5pt + 1pt**

b)- En déduire si les événements A et B sont indépendants ou non ? **0,25pt**

2)- Pour tout entier naturel n, on considère l'événement S_n défini par :

« La somme des deux nombres obtenus est égale à n ».

Calculer la probabilité de l'événement S_n suivant les valeurs de n **0,75pt**

Exercice 4 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(0, 2, -1)$ et de rayon $R = 5$, et la droite (D) passant par le point $A(2, 5, 7)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$

1)- a)- Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z - 20 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) **0,25pt**

b)- Calculer la distance $d(\Omega, (Oxy))$, puis en déduire que le plan (Oxy) coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$ de rayon $r = 2\sqrt{6}$ **2x0,5pt**

2)- a)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) **0,25pt**

b)- Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points à déterminer. **0,75pt**

3)- Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et perpendiculaires à la droite (D) **0,75pt**

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{\frac{-2}{x}}, \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- Calculer les limites $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **3x0,5pt**

2)- Montrer que la fonction f est continue à droite en zéro. **0,75pt**

3)- Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **2x0,5pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = \left(\dfrac{(x+1)^2 + 1}{x^2} \right) e^{\frac{-2}{x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

5)- a)- Vérifier que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1 \right) = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1 \right) = -2$ **2x0,5pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ **2x0,5pt**

6)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points à déterminer. **0,5pt**

7)- Construire la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ *(On admet que $(\mathscr{C}_f)$ est au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$)* **0,75pt**

8)- Déterminer graphiquement, selon les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(x+m)e^{\frac{2}{x}} - x = 1$ **0,75pt**

9)- a)- Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 e^{\frac{-2}{x}}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$ **0,25pt**

b)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ **0,5pt**