Examen blanc

Sujet N ° 4

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02,5 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	08,5 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{9}$, puis écrire v_n en fonction de n **0,5pt+0,5pt**

2)- Montrer que : $u_n = \dfrac{3 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9}\right)^n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déterminer la limite de (u_n) **0,5pt+0,5pt**

3)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n > 2,99$ **0,5pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 4$ et $b = 3 - i$

Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

1)- Montrer que : $z' = -iz + 4 + 4i$ **0,5pt**

2)- Vérifier que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = 3 + i$ **0,5pt**

3)- En déduire la nature du triangle ABC **0,25pt**

4)- Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et D l'image du point C par la translation t

a)- Déterminer d l'affixe du point D **0,5pt**

b)- En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$ **0,5pt**

5)- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\bar{z} - 3 - i| = |3 + i|$ **0,75pt**

Exercice 3 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 3, 0)$ et $C(2, 2, -3)$, et le vecteur $\vec{n}(2, -5, 1)$

1)- a)- Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) **0,5pt**

b)- En déduire que $2x - 5y + z + 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) **0,5pt**

2)- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC) **0,25pt**

3)- Soit (S) la sphère de diamètre $[BC]$

a)- Vérifier que : $A \in (S)$ **0,5pt**

b)- Déterminer les coordonnées du point Ω centre de la sphère (S) **0,25pt**

c)- Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèles au plan (ABC) **1pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : six boules rouges portant les nombres -1 ; -1 ; 0 ; 0 ; 1 ; 2 et quatre boules vertes portant les nombres 0 ; 1 ; 2 ; 2.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On note le nombre porté par la première boule par a et le nombre porté par la deuxième boule par b
On considère les événements : A : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
B : « le nombre complexe $a+ib$ est imaginaire pur »
C : « le module du nombre complexe $a+ib$ est $\sqrt{2}$ »

1)- Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$ **3 x 0,75pt**

2)- Calculer $p(A\cap B)$ **0,5pt**

3)- Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier. **0,25pt**

Problème (8,5 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-2-2x\ln x$

On considère ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $]0,+\infty[$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\searrow$	

1)- Vérifier que : $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}-2$, puis déduire le signe de $g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ sachant que : $\frac{2}{\sqrt{e}}\approx 1,2$ **2x0,25pt**

2)- En déduire, à partir du tableau précédent, le signe de la fonction g **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^2}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : $2cm$).

1)- Vérifier que : $D_f=]0,2[\cup]2,+\infty[$, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f **0,25pt + 0,75pt**

2)- Déterminer les branches infinies à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ **0,75pt**

3)- a)- Montrer que : $\forall x\in D_f,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-2)^3}$ **0,75pt**

b)- En déduire que $f'(x)$ et $x-2$ ont des signes contraires **0,5pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un seul point A que l'on déterminera **0,5pt**

5)- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C}_f)$ au point A **0,5pt**

6)- Construire la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ *(on admet qu'il existe un point d'inflexion de* $(\mathscr{C}_f)$ *d'abscisse comprise entre* 0,4 *et* 0,6) **1,5pt**

7)- Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x$ **0,5pt**

8)- Construire dans le repère précédent $(\mathscr{C}_h)$ la courbe représentative de la fonction h définie par :

$h(x) = \dfrac{\ln|x|}{(|x|-2)^2}$ **1pt**