Examen blanc

Sujet N ° 3

Matière : Mathématiques — **Classe :** 2 Bac SVT&SP

Année scolaire : 2023/2024 — **Durée :** 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 2	Suites numériques	02 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0, 1, -1)$, $B(2, 3, 1)$ et $C(0, 0, 1)$, et le vecteur $\vec{n}(3, -2, -1)$

1)- **a)-** Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés. **0,25pt**

b)- Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **0,5pt**

c)- En déduire que $3x-2y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) **0,5pt**

2)- On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2=0$

a)- Montrer que la sphère (S) est de centre $\Omega(1,2,0)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$ **2 x 0,25pt**

b)- Calculer la distance $d(\Omega,(ABC))$, puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathscr{C})$, dont on déterminera le centre et le rayon. **0,5pt + 0,25pt**

3)- Déterminer les équations cartésiennes de (P_1) et (P_2) les deux plans tangents à la sphère (S) et parallèles à (ABC) **0,5pt**

Exercice 2 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=13$ et $u_{n+1}=\dfrac{4+u_n}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $u_n>1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n=\ln(u_n-1)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison à déterminer **0,5pt**

b)- Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire que : $u_n=12\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+1$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **2 x 0,25pt**

3)- Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n=\left(\dfrac{u_1-1}{12}\right)\left(\dfrac{u_2-1}{12}\right)\cdots\left(\dfrac{u_n-1}{12}\right)$

a)- Montrer que : $P_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n(n+1)}$ **0,5pt**

b)- Calculer la limite $\lim (P_n)^{\frac{1}{n+1}}$ **0,25pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe l'équation : $z^2-(2+\sqrt{2})z+2+\sqrt{2}=0$ **0,75pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=i$, $b=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $c=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soit D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

a)- Montrer que l'affixe du point D est $d=2-i$ **0,5pt**

b)- Vérifier que : $a-d=i\sqrt{2}(b-c)$ **0,5pt**

c)- En déduire que $ABDC$ est un losange et que $AD=\sqrt{2}BC$ **0,5pt + 0,25pt**

d)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-2+i|=|z-i|$ **0,5pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 8 boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4 (Les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : "Parmi les trois boules tirées, aucune ne porte le nombre 0"
- B : "Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est nul "
- C : "La somme des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 5 "

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{5}{14}$, puis en déduire la valeur de $p(B)$ **1pt + 0,5pt**

2)- Montrer que : $p(C)=\dfrac{1}{7}$. **0,75pt**

3)- Calculer $p(A/C)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement C est réalisé. **0,75pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Le tableau ci-dessous représente le tableau de signe de la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x)=1+xe^{-x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

1)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ **2 x 0,25pt**

2)- En utilisant le tableau ci-dessus, dresser le tableau de variations de la fonction g **0,5pt**

3)- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ telle que $-\dfrac{3}{4}<\alpha<-\dfrac{1}{2}$ **0,75pt**

4)- En déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des deux intervalles $[\alpha,+\infty[$ et $]-\infty,\alpha]$ **2 x 0,25pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)e^{-x}-x+1$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **2 x 0,25pt**

b)- En déduire la branche parabolique de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ **0,25pt**

2)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **0,25pt**

b)- Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,5pt**

c)- Étudier la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ **0,5pt**

3)- a)- Vérifier que $f(\alpha)=-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ **0,5pt**

b)- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ **0,25pt**

4)- a)- Montrer que $f'(x) = -g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,5pt**

b)- Calculer la limite $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, puis interpréter géométriquement le résultat. **2 x 0,25pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

5)- Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et préciser son point d'inflexion. **0,5pt**

6)- Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en deux points *B* et *C* d'abscisses respectives β et γ telles que $1 < \beta < 2$ et $-2 < \gamma < -1$ **0,5pt**

7)- Construire la droite (*D*) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (On prendra $\alpha \approx -0,5$; $f(\alpha) \approx 2,5$; $\beta \approx 1,5$ et $\gamma \approx -1,5$) **1pt**

8)- Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 2$ **0,5pt**