Examen blanc

Sujet N ° 2

Matière : Mathématiques
Année scolaire : 2023/2024

Classe : 2 Bac SVT&SP
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Calcul de probabilités	03 points
Exercice 2	Nombres complexes	03 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 4	Suites numériques	02 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Une urne U_1 contient deux boules blanches, une boule rouge et trois boules vertes.

Une autre urne U_2 contient une boule blanche, deux boules rouges et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante : « on tire une boule de U_1 puis on tire une boule de U_2 »

On considère les événements suivants :

- A : « Les deux boules tirées sont blanches »
- B : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{12}$ **0,75pt**

2)- En utilisant la probabilité de l'événement contraire, montrer que : $p(B)=\dfrac{17}{24}$ **1pt**

3)- Calculer $p(A\cup B)$ **0,5pt**

4)- On répète cette expérience trois fois en remettant dans les urnes les deux boules tirées, après chaque tirage. Quelle est la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement deux fois ? **0,75pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=\dfrac{i}{2}(\sqrt{3}-i)$, $b=\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}$ et $c=i$

1)- Vérifier que : $a=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis déduire une forme trigonométrique de a **2 x 0,25pt**

2)- Montrer que : $a=-ib^2$ **0,5pt**

3)- Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$

a)- Donner l'expression complexe de la rotation R **0,5pt**

b)- Vérifier que : $R(A)=B$ et $R(B)=C$ **2 x 0,25pt**

c)- Déduire la nature du triangle ABC en précisant une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ **2 x 0,25pt**

4)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|2z-1-i\sqrt{3}\right|=5$ **0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $A(2,4,-2)$, et soit (P) le plan médiateur du segment $[OA]$, c'est-à-dire : le plan orthogonal à (OA) et passant par le milieu de $[OA]$.

1)- Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[OA]$. **0,5pt**

2)- Montrer que $x+2y-z-6=0$ est une équation cartésienne du plan (P). **1pt**

3)- Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant : $OM^2+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=0$

a)- Vérifier que : $OM^2+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{IM}$ **0,5pt**

b)- En déduire que (S) est la sphère de diamètre $[OI]$. **0,5pt**

c)- Quelle est la position relative de la sphère (S) et le plan (P) ? **0,5pt**

Exercice 4 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{2+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Montrer, par récurrence, que : $2 < u_n \leq 4$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente. **0,5pt + 0,25pt**

3)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_n - 2}\right)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison à déterminer **0,25pt**

b)- Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que : $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{2^{n+1} - 1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ **2 x 0,25pt**

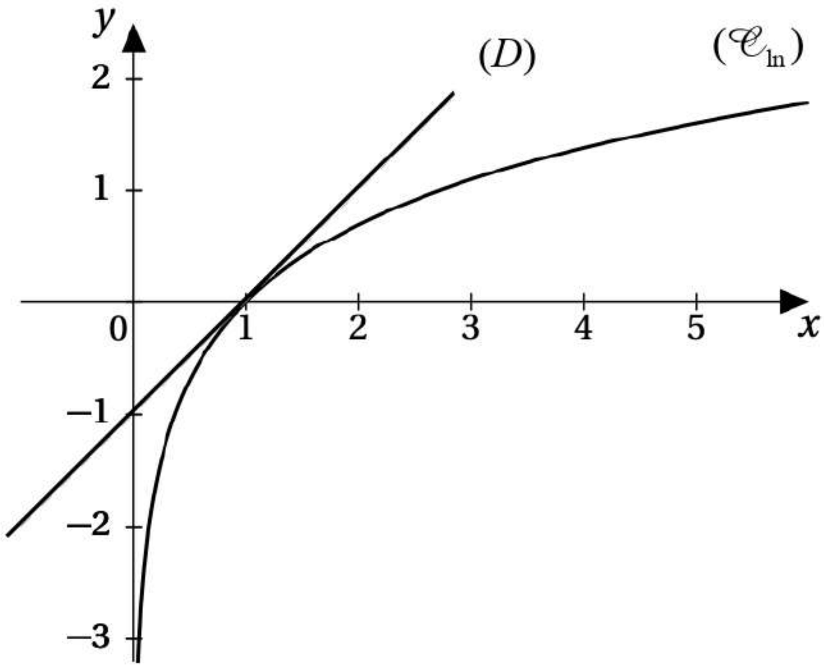
c)- Calculer la limite de la suite (u_n) **0,25pt**

Problème (9 points)

Partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + 2\ln x$

Dans la figure ci-dessous, (D) est la droite d'équation $y = x - 1$ et $(\mathscr{C}_{\ln})$ est la représentation graphique de la fonction ln.



1)- Calculer $g(1)$ **0,25pt**

2)- En utilisant la figure précédente, montrer que $(x - 1)$ et $\ln x$ ont le même signe. **0,75pt**

3)- En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$, et que : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$ **0,5pt**

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x}\right)\ln x - \dfrac{1}{x}$, et soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : $1cm$).

1)- Vérifier que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat. **0,5pt + 0,25pt**

2)- a)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **2 x 0,5pt**

b)- En déduire une branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,25pt**

3)- a)- Montrer que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ **0,5pt**

b)- Dresser le tableau de variations de f **0,5pt**

4)- Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses exactement en deux points d'abscisses α et β **0,75pt**

5)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (*On prendra* $\alpha \approx 0,5$ *et* $\beta \approx 2,9$ *, et on admet qu'il existe un point d'inflexion de* $(\mathscr{C}_f)$ *d'abscisse comprise entre* 1,7 *et* 1,8) **1pt**

6)- Déterminer graphiquement le signe de la fonction f **0,5pt**

7)- a)- Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ sur $]0,+\infty[$, puis déterminer la valeur de l'intégrale

$\displaystyle\int_1^2 \left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) dx$ **0,25pt + 0,5pt**

b)- En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x-2}{x}\right) \ln x \, dx = 2\ln(2) - \ln^2(2) - 1$ **0,75pt**

c)- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ **0,75pt**