Examen blanc

Sujet N ° 1

Matière : Mathématiques
Classe : 2 Bac SVT&SP
Année scolaire : 2023/2024
Durée : 3 heures

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice **non programmable** est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	02 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	03 points
Exercice 3	Nombres complexes	03 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	03 points
Problème	Étude d'une fonction numérique	09 points

Notation : ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (2 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{9u_n - 11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1)- Vérifier que $u_{n+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{3u_n - 2}{11 - 9u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

2)- Montrer, par récurrence, que $0 \leq u_n < \dfrac{2}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ **0,25pt**

3)- Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis déduire qu'elle est convergente. **2x0,25pt**

4)- On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{3u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

a)- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{-3}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n **2x0,25pt**

b)- Calculer la limite de la suite (v_n), puis déduire celle de la suite (u_n) **2x0,25pt**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 0, -1)$ et $B(-1, 2, 3)$, et l'ensemble (S) des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BM} = 0$

1)- Vérifier que $AB = 2\sqrt{6}$, puis déterminer les coordonnées du point Ω milieu du segment $[AB]$. **2x0,5pt**

2)- Déterminer la nature de l'ensemble (S) et préciser ses éléments caractéristiques. **0,5pt**

3)- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB). **0,5pt**

4)- Vérifier que le point O se trouve à l'intérieur de (S), puis déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par O et perpendiculaire à la droite (AB). **2x0,5pt**

Exercice 3 (3 points)

1)- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 26 = 0$ **1pt**

2)- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points Ω, A et B d'affixes respectives $w = 1 + i$, $a = 1 - 5i$ et $b = 2(2 - i)$

a)- Montrer que $a - w = \overline{w}(b - w)$ **0,5pt**

b)- Vérifier que $\dfrac{b-a}{b-w} = i$, puis en déduire la nature du triangle ΩAB **0,5pt+0,25pt**

c)- Déterminer (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\overline{z} - 1 - 5i| = |z - 1 - i|$ **0,5pt**

d)- En déduire que B appartient à (E) **0,25pt**

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : une boule noire portant le nombre 1, cinq boules vertes portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 2, et quatre boules rouges portant les nombres 1 ;2 ; 2 ; 2.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : « Les trois boules tirées sont de même couleur »
- B : « Les trois boules tirées portent le même nombre »

- C : « Les trois boules tirées sont de même couleur ou elles portent le même nombre »

1)- Montrer que : $p(A)=\dfrac{7}{60}$ et $p(B)=\dfrac{1}{15}$, puis calculer $p(A\cap B)$ **1pt+1pt+0,5pt**

2)- En déduire que : $p(C)=\dfrac{7}{40}$ **0,5pt**

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-2e^{-2x}-4x$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

1)- a)- Vérifier que $f(x)=e^{2x}\left(\dfrac{1}{2}-2e^{-4x}-4xe^{-2x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,25pt**

b)- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-2x}=0$, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **0,25pt+2x0,5pt**

c)- En déduire une branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ **0,25pt**

2)- a)- Vérifier que $f(x)=e^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}e^{4x}-2-4xe^{2x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **2x0,25pt**

b)- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x}=-\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ **0,25pt+0,5pt**

c)- En déduire une branche infinie à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ **0,25pt**

3)- a)- Montrer que $f'(x)=e^{-2x}\left(e^{2x}-2\right)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$ **0,5pt**

b)- Vérifier que $f'\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=0$ puis interpréter géométriquement ce résultat. **2x0,25pt**

c)- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ **0,25pt**

4)- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$ **0,75pt**

5)- Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$ (On prendra $\alpha\approx 1{,}1$) **0,75pt**

6)- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x=1$ **1pt**

7)- a)- Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ **0,5pt**

b)- Construire, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction f^{-1} **0,5pt**

c)- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0, puis exprimer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α **2x0,5pt**