1 / 4
***** 1

الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
دورة 2023
- الموضوع 30 -

ssssssssssssssssssssssss | SN F23

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵉⵜ

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \dfrac{20u_n}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 1) a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 19$.

0,25 b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(19 - u_n)}{u_n + 1}$, puis en déduire la monotonie de $(u_n)_n$.

0,25 c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

0,25 d) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $19 < u_n \leq 20$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 19}$.

0,75 a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 20$ puis exprimer v_n en fonction de n.

0,5 b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{19v_n}{v_n - 1}$ puis en déduire que : $u_n = \dfrac{19 \times 20^{n+1}}{20^{n+1} - 1}$.

0,25 c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (justifier votre réponse).

0,25 3) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que : $u_n - 19 < 10^{-25}$.

Exercice 2 : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2,1,0)$ et $B(-4,1,0)$.

0,5 1) Soit (P) le plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Montrer que $x + y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de (P).

0,75 2) Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient la relation $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(-1,1,0)$ et de rayon 3.

0, 5 3) a) Calculer la distance du point $\Omega(-1,1,0)$ au plan (P), puis en déduire que (P) coupe (S) selon un cercle (C).

0,5 b) Montrer que le centre du cercle (C) est le point $H(0,2,-1)$.

0,75 4) Montrer que $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, puis en déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice 3 : (3 points)

0,5 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$

2) On considère les deux nombres complexes : $a = 1 + i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$

0,25 a) Vérifier que : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1 + \sqrt{3}}{4}$

0,5 b) Montrer que : $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

0,5 c) Montrer que : $\arg\left(\dfrac{a}{b}\right) \equiv \dfrac{7\pi}{12} [2\pi]$, puis en déduire que : $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point B d'affixe b, et T la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $i2\sqrt{3}$, et soit le point C l'image du point B par la translation T.

0,25 a) Montrer que l'affixe du point C est $c=1+i\sqrt{3}$.

0,25 b) En remarquant que $c=\bar{b}$, vérifier que : $\frac{b}{c}=\frac{1}{4}b^2$

0,5 c) Déterminer $\arg\left(\frac{b}{c}\right)$ et $\left|\frac{b}{c}\right|$, puis en déduire que OBC est un triangle isocèle en O.

0,25 d) Soit le point B l'image du point C par la rotation R du centre O et d'angle α.

Déterminer une mesure de l'angle α.

Exercice 4 : (3 points)

Dans une pâtisserie, 60% des gâteaux sont avec des fruits, 42% des gâteaux sont au chocolat et 12% des gâteaux

sont avec des fruits et au chocolat.

Un client choisit un gâteau. On note les évènements suivants :

F : « Le gâteau choisit est avec des fruits »

C : « Le gâteau choisit est au chocolat »

0,75 1) Calculer $p\ F$, $p\ C$ et $p\ F\cap C$.

0,25 2) a) Calculer la probabilité que le gâteau soit sans fruits et au chocolat.

0,25 b) Quelle est la probabilité pour que le gâteau soit au chocolat sachant qu'il est avec des fruits ?

0,25 c) Quelle est la probabilité pour que le gâteau soit au chocolat sachant qu'il est sans fruits ?

0,25 3) a) Construire un arbre de possibilités.

0,25 b) Quelle est la probabilité pour que le gâteau soit avec des fruits sachant qu'il est au chocolat ?

1 4) Le prix d'un gâteau sans fruits et sans chocolat est 4 dirhams.

Le prix d'un gâteau avec fruits seulement est 5 dirhams.

Le prix d'un gâteau au chocolat et sans fruits est 6 dirhams.

Le prix d'un gâteau avec des fruits et au chocolat est 7 dirhams.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le prix d'un gâteau.

Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

$X_i =$ Le prix d'un gâteau	4d	5d	6d	7d
$p\ X=X_i$				

Problème : (3 points)

I) On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x-1} - 1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'\ x$	$-$	0	$+$
$g\ x$	-1 ↘	$g\ -1$	↗ $+\infty$

0,25 a) Calculer $g\ 1$.

0,5 b) Déduire le signe de $g\ x$.

II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)e^{x-1} - x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

0,5	1) a) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
0,5	b) Montrer que la droite $(\Delta) : y=-x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.
0,5	c) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).
1,25	2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, puis donner une interprétation géométrique des résultats
0,75	3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$.
0,25	b) Dresser le tableau de variation de f.
0,5	c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions α et β (On prendra $\alpha<\beta$).
0,75	d) Justifier que $\alpha\in[-0,4\,;-0,3]$ et $\beta\in[1,8\,;1,9]$.
1	4) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite (Δ) et les réels α et β. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
	5) Soit un réel $\lambda<-1$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations respectives : $x=\lambda$ et $x=-1$.
0,75	a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A(\lambda)=(\lambda-2)e^{\lambda-1}+3e^{-2}$.
0,5	b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} f(\lambda)$

Annexe à rendre avec la copie