الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
دورة 2023
- الموضوع 26 -

ssssssssssssssssssssssss SN F23

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⴰⵏⵉⵜ

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Calcul de probabilités	3 points
Exercice 4	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

	Exercice 1 : **(3 points)**
	Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $u_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,5	**1)** Montrer, par récurrence, que $u_n<\sqrt{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,5	**2)** Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. En déduire qu'elle est convergente
	3) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $v_n=\dfrac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,5	**a)** Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique.
0,5	**b)** Exprimer v_n en fonction de n, puis déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_n=\sqrt{2}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
0,25	**c)** Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$
	4) Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $w_n=\ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,25	**a)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
0,5	**b)** On pose $S_n=w_1+w_2+.....+w_n$. Montrer que : $S_n=\dfrac{n}{2}\ln 2-\ln(n+1)$
	Exercice 2 : **(3 points)**
	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;3;0)$ et $B(1;-3;0)$. Soit (P) le plan passant par le point $E(0;3;1)$ et $\vec{n}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ son vecteur normal
0,5	**1)** Montrer que $2x+2y-z-5=0$ est une équation cartésienne du plan (P)
	2) Soit (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient la relation $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$
0,5	Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1;0;0)$ et de rayon $R=3$
0,5	**3)** Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)
0,25	**4) a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (P)
0,5	**b)** En déduire les coordonnées du point H le centre du cercle (C)
0,5	**5)** Montrer que $\dfrac{\left\Vert\overrightarrow{A\Omega}\wedge\overrightarrow{AE}\right\Vert}{\left\Vert\overrightarrow{AE}\right\Vert}=3$ et en déduire $d(B;(AE))$ la distance du point B à la droite (AE)
0,25	**6)** Calculer l'aire du triangle $A\Omega E$

Exercice 3: (3 points)

Un sac contient dix jetons indiscernables au toucher dont cinq blancs numérotés 0 ,0 ,1 ,1 ,1 et quatre rouges numérotés 0, 0, 0, 1 et un jeton noir numéroté 0. On tire simultanément trois jetons du sac.

On considère les deux évènements :

A:"*les trois jetons tirés portent le même nombre*"

B:"*tirer exactement un jeton blanc parmi les trois jetons tirés*"

1 **1)** Montrer que : $p(A)=\frac{1}{5}$ et $p(B)=\frac{5}{12}$

0,75 **2)** Calculer $p(A\cap B)$ et en déduire que $p(A\cup B)=\frac{31}{60}$

0,25 **3)** Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier

4) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage (de trois jetons simultanément) le nombre des jetons blancs restants dans le sac.

0,5 **a)** Montrer que $p(X=2)=\frac{1}{12}$

0,5 **b)** Déterminer la loi de probabilité de X

Exercice 4: (3 points)

0,5 **1)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

2) Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A ; B et C d'affixes :

$$a=\sqrt{2}(1+i)\ ;\quad b=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\quad ;\quad c=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

0,5 **a)** Ecrire a et c sous forme trigonométrique

0,5 **b)** En déduire que $b^3=\frac{a}{2}$ et que $b^2\overline{c}=1$

3) Soit z l'affixe d'un point M du plan z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{6}$

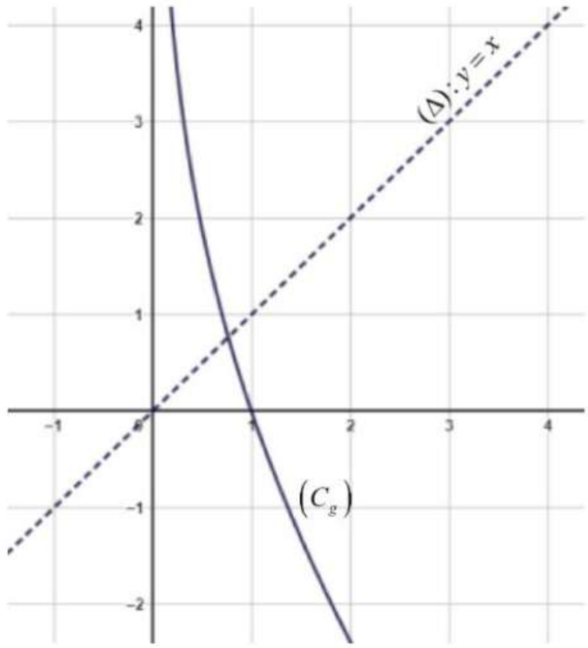
0,25 **a)** Vérifier que $z'=\overline{c}.z$

0,5 **b)** Montrer que l'affixe du point A' l'image du point A par la rotation R est $a'=2b$

0,75 **c)** Montrer que $\frac{a-a'}{b^2}=2(b-\overline{b})$, puis en déduire que $(AA')\perp(OC)$

Problème: (8 points)

I) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=1-x-2\ln x$



0,5 **1)** Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, en déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

0,5 **2)** Montrer que l'équation $g(x)=-1$ admet une solution unique α tel que $1<\alpha<\dfrac{3}{2}$

0,25 **3)** En déduire le signe de $\left(g(x)+1\right)$ sur $]0;+\infty[$

0,5 **4)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^2 \ln x\, dx = 2\ln 2-1$

1 **5)** A partir de la représentation graphique de la fonction g $\left(\textit{voir figure ci}-\textit{contre}\right)$ $\left(u.a=1cm^2\right)$, calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par la courbe $\left(C_g\right)$, la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$

II) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=\left(2\ln x+x-1\right)\dfrac{e^{1-x}}{x^2}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. $\left(\left\|\vec{i}\right\|=2cm\right)$

0,5 **1)** Vérifier que $f(x)=-g(x)e^{g(x)}$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(\alpha)=\dfrac{1}{e}$

0,5 **2)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 **3)** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter géométriquement le résultat

0,5 **4) a)** Montrer que $f'(x)=-g'(x)e^{g(x)}\left(g(x)+1\right)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, En déduire que f est croissante sur $]0;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

0,25 **b)** Dresser le tableau de variations de f

0,5 **5)** Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $A(1;0)$

1 **6)** Construire la courbe (C) et la droite (T) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(On prend $\alpha\simeq 1,4$ et on admet que (C) a un seul point d'inflexion dont l'abscisse est compris entre α et 2)

7) Soit h la restriction de f sur $]0;\alpha]$

0,5 **a)** Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque définie sur $\left]-\infty;e^{-1}\right]$

0,5 **b)** Déterminer $\left(h^{-1}\right)'(0)$

0,5 **c)** Résoudre graphiquement dans $]0;+\infty[$ l'équation $x^2e^{x-1}=2\ln x+x-1$