3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 points)

Une urne contient 3 boules rouges 4 vertes et 2 boules noires indiscernables au toucher

On tire simultanément trois boules de l'urne

On considère les deux événements :

A ''Obtenir trois boules de même couleurs''

B'' Les boules tirées de couleur différentes deux à deux ''

C'' Obtenir au moins une boule verte''

0,75 — 1) Montrer que $P(A) = \frac{5}{84}$ et $P(B) = \frac{2}{7}$ et $P(C) = \frac{37}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui relie chaque tirage par le nombre de boules noirs restantes dans l'urne

0,75 — a) Vérifier que les valeurs de X sont 0 ;1 ;2

0,25 — b) Montrer que $P(X = 2) = \frac{35}{84}$

0,5 — c) Déterminer la loi de probabilité de X

0,75 — d) Montrer que $E(X)$ l'espérance mathématique de X est $\frac{4}{3}$

Exercice 2 : (3 points)

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}\,)$

On considère les points $A\,(0\,;-1\,;\,1)$ et $B\,(-1\,;\,1\,;\,3)$ et C (0 ; 1 ; 5) et (S) l'ensemble des points M(x ;y ;z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 12z + 22 = 0$

0,5 — 1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ et déduire que les points A et B et C forment un plan

0,5 — b) Montrer que $2x + 2y - z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 — 2) a) Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1\,;-1\,;-6)$ et de rayon $R = 4$

0,5 — b) Calculer $d\,(\Omega\,;\,(ABC))$ et déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon $r = \sqrt{7}$

0,5 — 3) a) Déterminer la représentation paramétrique de (D) passant par le point Ω est orthogonale au plan (ABC)

0,5 — b) Déterminer le triplet de coordonnées du point H centre du cercle $(C\,)$

Exercice 3 : (3 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé , considérons les points $A(a)\,;B(b)\,;C(c)\,;D(d)$ tel que : $a = 1 + i\,$; $b = 1 - i\,;\; c = -1 + i$ et $d = -1 - i$

0,25 — 1) a) Déterminer la forme trigonométrique de a et c et déduire que $OA = OC$

0,5 — b) Déduire que les points $A\,;\,B\,;\,C$ et D appartenant au même cercle (C) puis déterminer le centre et le rayon du cercle (C)

0,5 — 2)a) Montrer que $b - a = i(c - a)$ et déduire la nature du triangle ABC

0,25 — b) Déduire que le point B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,25 — c) Déterminer l'image du point B par la tarnslation T de vecteur $\overrightarrow{AC}$

0,25 — d) Déduire que le quadrilatère ABDC est un carré

3) On considére le point E d'affixe $e = 1 + 2i$

0,5 — a) Vérifier que $\frac{b-a}{e-a} = -2$

0,5 — b) En déduire que le point B est l'image de E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2

Problème : (9 points)

A) Soit g définit sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^x - e^x + 1$

0,25 1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g'(x) = xe^x$

0,5 2) Dresser le tableau de variations de g puis montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$

0,75 3) Vérifier que $(\forall x \in]0;1[) : g(x) - x = (x-1)(e^x - 1)$ puis en déduire que $(\forall x \in]0;1[) \ : g(x) < x$

B) Soit une suite (U_n) tel que :

$U_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : U_{n+1} = g(U_n)$

0,25 1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : 0 < U_n < 1$

0,5 2) Montrer que (U_n) est décroissante (Utiliser A)3))

0,75 3) Déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

C) Soit f une fonction définit sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-2)(e^x + 1)$$

(C_f) Est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité 1cm

0,25 1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 2) a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = g(x)$

0,75 b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ en justifiant votre réponse

0,25 3) a) Montrer que la droite $(\Delta) : y = x - 2$ est asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $-\infty$

0,5 b) Etudier la position relative de (C_f) et (Δ) sur $\mathbb{R}$

4) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

0,5 5) a) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion unique au point d'abscisse 0

0,75 b) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0

0,25 6) Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse 2

0,5 7)a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J (à déterminer)

0,75 b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 puis montrer $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{e^2+1}$

0,75 8) Tracer (T) ; (Δ) et (C_f) dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$

0,5 9)a) Par une intégration par partie montrer que :

$$\int_0^2 (x-2)e^x \, dx = 3 - e^2$$

0,75 b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.