3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (**3** points)

Soit (u_n) une suite tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4} \quad et \; u_0 = 1$$

0,25 1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

0,5 2) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$

0,75 3) Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente

0,25 4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leq (\frac{3}{4})^n$

5) En déduire la limite de (u_n)

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{n-1}$

0,5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $S_n \leq 4(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n)$

0,75 b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n \leq 4$

Exercice 2 : (**3** points)

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotés :1 ;1 ;1 ;1 ;2 ;2.

<u>On tire au hasard, successivement et sans remise 3 jetons du sac.</u>

On considère les évènements suivants :

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 3»

B : « Le premier jetons porte le numéro 2»

0,5 1) a)Montrer que : $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

0,5 b) Calculer $P_B(A)$.

0,5 c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2) Soit X la variable aléatoire associe à la somme des numéros portés par les trois jetons tirés.

0,75 a) Déterminer les valeurs prises par la variable X.

0,75 b) Déterminer la loi de de probabilité de la variable X.

Exercice 3 : (**3** points)

On considère dans l'espace les points : $A(1; 0; 1)$;$B(0; -4; 4)$; $C(3; -4; 5)$, et la sphère (S) dont une équation cartésienne: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$

0,25 1)a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2; -2; 3)$ et de rayon 3

0,5 b) Vérifier que $A \in (S)$ puis écrire une équation cartésienne du plan (P) tangente à (S) en A.

0,75 2) a) Montrer que: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$, et déduire que $2x - 5y - 6z + 4 = 0$ est une équation du plan(ABC)

0,25 b) Montrer que (ABC) et (P) sont orthogonaux

0,5 c) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera son centre H et son rayon

0,75 3) Montrer que (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 4 : (3 points)

On considère dans le repère complexe $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A(a) ; B(b) ; C(c) et D(d) tel que : $a = i$; $b = 2\sqrt{3} - i$; $c = \sqrt{3} + 2i$ et $d = \sqrt{3} - 2i$

0,25 1) Soit la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et M(z') l'image de M(z) par R

0,5 a) Montrer que l'écriture complexe R est : $z' = -iz - 1 + i$

0,75 b) Vérifier que $c' = 1 + (1 - \sqrt{3})i$ est l'affixe du point C' l'image de point C par la rotation R

2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k = \sqrt{3}$

0,25 a) Montrer que D est l'image du point C' par l'homothétie h

0,5 b) Vérifier que $\frac{d-a}{c-a} = -\sqrt{3}\,i$ puis en déduire $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$

3) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

0,75 a) Déterminer l'image du point D par la translation t Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle

Problème : (9 points)

A) Soitg une fonction définit sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$

0,5 1) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

0,5 2) Calculer $g'(x)$;puis dresser le tableau des variations de g

0,75 3) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[;\quad g(x) > 0$

B) Soit f une fonction définit sur $]0; +\infty[$par

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x}$$

Et (Cf) son graphe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (Unité 1 cm)

0,5 1) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et Interpréter le résultat géométrique

0,5 2) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$et étudier la branche infinie de(Cf) au voisinage de $+\infty$

0,75 3)a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[\ : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

0,25 b) Dresser le tableau de variation de f , en justifiant votre réponse

0,5 c)Déterminer l'équation de la tangente (T) au point A(1 ;1)

0,75 4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1},définie sur un intervalle J que l'on précisera

0,25 5) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$; (On prend $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,2$)

1 6) Tracer (T) ; (Cf) et (Cf^{-1})dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

0,75 7) a) Montrer que : $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = 6$

0,5 b) Par une intégration par parties montrer que : $\int_{e^2}^{e^4} \ln(x)\,dx = 3e^4 - e^2$

0,75 c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Ox) et les droites $x=e^4$ et $x=e^2$