المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Nombres complexes.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 5	Equation différentielle	1 point
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	7 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 (3 points)

Soit (u_n) une suite numériques définie comme se suit : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 6 - \frac{7}{u_n+2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 **1)** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 **2) a-** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-5)(1-u_n)}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déduire que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 **b-** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) On considère (v_n) une suite numériques définie par : $v_n = \frac{u_n-5}{u_n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 **a-** Montrer que (v_n) est une suite géométrique sa raison $\frac{2}{5}$.

0, 5 **b-** Déterminer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 **c-** Calculer $S_n = v_0 + v_1 + v_2 \dots + v_n$ en fonction de n

0,25 **d-** Calculer la limite $lim\ S_n$

Exercice 2 (3 points)

1 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 8i)(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) = 0$.

2) Dans le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; on considère les points A,B et C d'affixes respectives :

$$\boldsymbol{a = 2\sqrt{3} - 2i} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b = 2\sqrt{3} + 2i} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c = -8i}$$

0, 5 a- Ecrire $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sous forme exponentielles :

0,5 b- Montrer que l'affixe du point D l'image de C par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est $\boldsymbol{d = 4\sqrt{3} + 4i}$

0,5 c- Déterminer l'affixe du point E l'image de A par la homothétie h de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$.

0,25 3) a- Montrer que $\frac{a-d}{a} = -\sqrt{3}i$

0,25 b- En déduire que le triangle OAD est rectangle en A.

Exercice 3 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$,on considère les points :

$$A(1; 0; 1) \quad ; \quad B(1; -1; 0) \quad ; \quad C(3; 1; 1)$$

0, 5 1) a-Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

0,5 b- En déduire $x - 2y + 2z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,5 2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(2; -1; 1)$ et que son rayon est $R = 1$.
Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0,25 3) a-Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\boldsymbol{\Delta})$ passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).

0, 5 b- Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)au point H à déterminer.

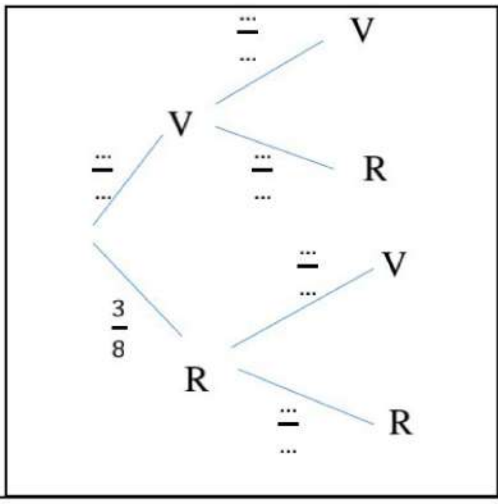
4) Soit le plan (Q) d'équation cartésienne : $2x + y - 3z + 1 = 0$

0,5 a-Montrer que les plans(ABC) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

0,25 b- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\boldsymbol{D})$ passant par le point I

Exercice 4 (3 points)

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : cinq boules vertes et trois boules rouges.
On effectue deux tirages successifs sans remettre la première boule tirée qans l'urne.



0,25 ① Montre que la probabilité d'obtenir la première boule verte est $\frac{5}{8}$.

1 ② Compléter l'arbre de probabilités ci-contre:

③ Soit X la variable aléatoire qui à deux tirages associe le nombre des boules rouges tirées.

0,25 a-Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire binomiale X sont 0, 1 et 2.

0,5 b-Montrer que :$P(X=0)=\frac{5}{14}$ et $P(X=2)=\frac{3}{28}$

0,5 c-Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

0, 5 d-Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Exercice 5 (1 point)

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-6y'+9y=0$

0,5 1-Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante (E)

0,5 2- Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les conditions : $g(0)=4$ et $g'(0)=1$

Problème (7 points)

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $\begin{cases} \boldsymbol{f(x)=2-x+x\ln(2x-3)} & ; \boldsymbol{x\geq 2} \\ \boldsymbol{f(x)=-x+1+e^{x-2}} & ; \boldsymbol{x<2} \end{cases}$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.(unité 2cm)

0,5 1) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x=2}$

0,25 2) a- Vérifier que $\frac{f(x)}{x-2}=-\mathbf{1}+\mathbf{2}\frac{\boldsymbol{ln}[1+2(x-2)]}{2(x-2)}$ pour tout $x\in[2;+\infty[$,

0,25 b- Vérifier que $\frac{f(x)}{x-2}=-\mathbf{1}+\frac{e^{x-2}-1}{x-2}$ pour tout $x\in]-\infty;2]$

0,5 c- Etudier la dérivabilité de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x=2}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 3) a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\boldsymbol{f(x)}=+\infty$

0,5 b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 4) a- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\boldsymbol{f(x)}=+\infty$

0,5 b- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\boldsymbol{f(x)+x-1=0}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 c- Etudier la position relative de $(\boldsymbol{C_f})$ et la droite $(\boldsymbol{D})$ d'équation $\boldsymbol{y=x-1}$

0,5 5) a-Montrer que : $\begin{cases} \boldsymbol{f'(x)=\frac{3}{2x-3}+ln(2x-3)} & ; \boldsymbol{x\geq 2} \\ \boldsymbol{f'(x)=-1+e^{x-2}} & ; \boldsymbol{x<2} \end{cases}$

0,5 b- Montrer que $\frac{3}{2x-3}+\boldsymbol{ln(2x-3)>0}$ pour tout $x\in[2;+\infty[$ et $\boldsymbol{-1+e^{x-2}<0}$ pour tout $x\in]-\infty;2]$.

0,5 c- En déduire que $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$ et croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

0,25 d- Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f}$

1 6) Construire $(\boldsymbol{C_f})$ et la droite $(\boldsymbol{D})$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 7) a-Montrer que $I=\int_0^2 e^{x-2}\,dx=\frac{e^2-1}{e^2}$

0,5 b-Calculer en $\boldsymbol{cm^2}$, l'aire du domaine plan limite par$(\boldsymbol{C_f})$, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=2$ d'équations: $x=0$ et $x=2$.