الامتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
الدورة العادية 2023
- الموضوع 19 -

ssssssssssssssssssssss | SN F23

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée .
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient .
- ✓ L'utilisation de couleur rouge dans la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

- L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Les nombres complexes	3 points
Exercice 3	Probabilités	3 points
Exercice 4	Calcul d'intégrale et équations différentielles	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(2;1;4)$, $B(0;3;3)$ $C(4;2;2)$ et $D(0;-3;0)$.

Soit (S) l'ensemble des points M dans l'espace tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM} = 0$

1. a. Montrer que : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ est une équation cartésienne de (S).
   b. Montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1;-1;2)$ et de rayon $R=3$.
2. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -3\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}$, puis en déduire que les points A, B et C définissent un plan.
   b. Montrer que : $x+2y+2z-12=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
3. Déterminer l'aire du triangle ABC.
4. a. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
   b. Montrer que le point A est le point de contact de (ABC) et (S).
5. Montrer que : $x+2y+2z=0$ est une équation cartésienne du plan (P) passant par O et parallèle au plan (ABC).
6. a. Montrer que le plan (P) perce la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r=2\sqrt{2}$.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passante par le point Ω et perpendiculaire au plan (P).
   c. Déterminer le centre du cercle (Γ) .

Exercice 2 (3 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=3+3i$, $b=3-3i$, $c=6$ et $d=9+3i$

1. Montrer que a et b sont des solutions de l'équation : $z^2-6z+18=0$
2. a. Ecrire a et b sous forme exponentielle
   b. Déduire que $a^4+ib^2+306=0$ et que $\frac{a}{b} \in i\mathbb{R}$
3. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$. Prouver que C est l'image de B par t
4. Vérifier que $\frac{b-c}{a-c} = i$, puis déduire que le quadrilatère OACB est un carré.
5. Soit le point $M'(z')$ image du point $M(z)$ par la rotation r de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$
   a. Vérifier que : $z' = -iz+6+6i$
   b. Démontrer que D image de A par la rotation r
   c. Déduire la nature du triangle ADC

Exercice 3 (3points)

Un sac contient : 3 boules rouges, 4 boules noires et 3 boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules du sac.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : ‘’ Obtenir 3 boules de même couleur ‘’
   B : ‘’ Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux ‘’
2. Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre des couleurs obtenues après chaque tirage
   a. Donner les valeur possible de $X(\Omega)$
   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X
3. On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite en remettant, dans l'urne, après chaque tirage, les boules tirées. Calculer la probabilité pour que l'évènement A soit réalisé exactement 3 fois

Exercice 4 (3points)

1. a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $\frac{x^2+3x-2}{x-2} = x + 5 + \frac{8}{x-2}$
   b. Déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{x^2+3x-2}{x-2}\,dx$
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^{e^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 4$
3. a. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 6y' + 9y = 0$
   b. Déterminer la solution h qui satisfaite aux conditions suivantes : $h(0) = 3$ et $h'(0) = -1$
   c. En déduire une primitive de h qui s'annule en 0

Problème (8 points)

Partie 1 :

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. a. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$
   b. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$
   c. Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^*), g(x) > 0$
3. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1; 2[$

Partie 2 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = e^{-x} + \ln(x+1)\,; x \geq 0 \\ f(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + 1 \quad ; x < 0 \end{cases}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus
3. a. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f'(x) = \frac{e^{-x}g(x)}{x+1}$
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_-^*$, puis montrer que $f'(x)$ et $(x+1)$ ont le même signe
   c. Dresser le tableau de variations de f sur D_f
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, puis étudier les branches infinies de (C_f)
5. Construire la courbe (C_f)
6. Calculer l'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Partie 3 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \ln(2) \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Calculer u_1 puis vérifier que $0 < u_1 < u_0 < \alpha$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < \alpha$
3. Montrer que (u_n) est décroissante
4. Déduire que (u_n) est convergente puis calculer sa limite