الامتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية

الدورة العادية 2023

- الموضوع 18 -

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

sssssssssssssssssssssss | SN F23

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée .
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient .
- ✓ L'utilisation de couleur rouge dans la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

- L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

Exercice 1 (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{2u_n+7} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2} < u_n \leq 1$.
2. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-2u_n)(u_n+3)}{2u_n+7}$ puis déduire que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente .
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$.

   b. Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$, puis déduire la limite de (u_n).
4. On considère la suite numérique (w_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N});\ w_n = \ln(2 - u_n)$.
   Calculer $\lim w_n$
5. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n+3}$

   a. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_{n+1}+3} = \frac{1}{8}\left(\frac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n+3}\right)$

   b. Déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 2 (3 points)

1. On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $\frac{1}{2}z^2 - z + 2 + \sqrt{2} = 0$

   a. Montrer que le discriminant de (E) est $\Delta = -\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$.

   b. Déduire les solutions de (E) .
2. On considère, dans le plan complexe muni à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respective : $a = 1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$, $b = \bar{a}$.
   Vérifier que $a = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{a}$
3. Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

   a. Montrer que $z' = \left(\frac{a}{\bar{a}}\right)z$, puis vérifier que A est l'image de B par la rotation R.

   b. Déduire que la forme trigonométrique de a est $a = |a|\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$
4. Soit C le point d'affixe $c = 2 + \sqrt{2}$
   Vérifier que $\bar{a} - c = i(a - c)$ puis déduire la nature du triangle CAB .

Exercice 3 (3points)

Dans l'espace mini d'un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0; -2; -2)$, $B(1; -2; -4)$, $C(-3; -1; 2)$ et la sphère (S) d'équation
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

1. Montrer que le centre de la sphère est $\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon 5.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, puis déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Montrer que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC) .
4. Calculer $d\left(\Omega, (ABC)\right)$ puis déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
5. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est perpendiculaire au plan (ABC) .

   b. Montrer que (Δ) coupe la sphère (S) en deux points $E\left(\frac{13}{3}; \frac{16}{3}; \frac{14}{3}\right)$ et $F\left(\frac{-7}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

   c. Vérifier que F est le point de contact.

Exercice 4 (3points)

Un sac contient 12 boules indiscernables au toucher : 5 boules noires, 4 boules blanches et 3 boules rouges. On tire au hasard simultanément trois boules du sac.

On considère les événements A et B : $\begin{cases} \text{A: "Obtenir trois boules de même couleurs"} \\ \text{B: "Obtenir au moins une boule blanche"} \end{cases}$

1. a. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, puis déduire $P(A \cup B)$.
   b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche sachant que les trois boules tirées sont de même couleurs.
3. On répète l'expérience précédente 4 fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans le sac. Qu'elle est la probabilité que l'événement B soit réalisé deux fois exactement.

Problème (8 points)

Soit f une fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + (1 - x)\ln(x - 1) \ ; x > 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en 1.
2. a. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); \frac{f(x)-2}{x-1} = 2 - \ln(x - 1)$
   b. Déduire que f n'est pas dérivable à droite en 1, puis interpréter le résultat géométriquement.
3. a. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); f(x) = x\left[2 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(x - 1)\right]$
   b. Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter le résultat géométriquement.
4. a. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); f'(x) = 1 - \ln(x - 1)$
   b. Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'inéquation $1 - \ln(x - 1) < 0$
   c. Déduire que f est croissante sur $]1; e + 1[$ et décroissante sur $[e + 1; +\infty[$.
   d. Dresser le tableau de variations de f, puis construire la courbe (C_f).
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[e + 1; +\infty[$ et que $e + 1 < \alpha < e^2 + 2$
6. a. Montrer que $(\forall x \in]1; +\infty[); f(x) - 2 = (1 - x)(\ln(x - 1) - 2)$
   b. Résoudre dans $]1; +\infty[$ l'inéquation $\ln(x - 1) - 2 < 0$
   c. Déduire le signe de $f(x) - 2$ sur $]1; e^2 + 1]$.
7. a. En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_{e+1}^{e^2+2}(1 - x)\ln(x - 1)\, dx$
   b. Calculer en cm², la surface de la partie comprise par (C_f), et les droites $x = e + 1$, $x = e^2 + 2$, $y = 2$