الامتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية

الدورة العادية 2023

- الموضوع 17 -

sssssssssssssssssssssss | SN F23

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⵏⵏⵉⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée .
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient .
- ✓ L'utilisation de couleur rouge dans la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

- L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Suites numériques	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul de probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	8 points

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace mini d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points $A(1;1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, puis déduire que $3x + 3y + 2z - 6$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Calculer $\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$ puis déduire la distance du point B à la droite (AC).
3. Soit (D) une droite passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;-3)$.
   Montrer que (D) ets perpendiculaire à a la droite (AB).
4. Soient (P) un plan d'équation cartésienne $2x + y - 2z + 1 = 0$ et (S_α) une sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{5}{4} - \alpha = 0$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   a. Déterminer en fonction de α le rayon de la sphère (S_α) et les coordonnées du centre Ω
   b. Trouver la valeur de α pour que le plan (P) soit tangent à la sphère (S_α).
   c. Déterminer le point de contact de la sphère (S_α) et le plan (P).

Exercice 2 (3 points)

I. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
2. a. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ puis déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
   b. Déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $1 - u_{n+1} \leq \frac{6}{7}(1 - u_n)$. $\left(\text{Remarquez que } u_n \geq \frac{2}{3}\right)$
   b. Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $1 - u_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{6}{7}\right)^n$, puis déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

II. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N});\ v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$
2. Ecrire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 (3points)

I. On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, le polynôme :
$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{2} + 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1. Vérifier que $z = 2$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer les réels α et β tel que : $P(z) = (z - 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$
3. On pose $\alpha = -2\sqrt{2}$ et $\beta = 4$. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

II. On considère, dans le plan complexe muni à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respective :
$a = 2$, $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $c = 2\left(e^{i2\pi} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ et $d = 2 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 2)$

1. Montrer que $\frac{d-a}{b-a} = i$, puis déduire la nature du triangle ABD.
2. Ecrire b sous forme trigonométrique.
3. Montrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{-i\frac{\pi}{8}} + e^{i\frac{\pi}{8}}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$, puis déduire que $c = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$.
4. Ecrire c sous forme algébrique, puis montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

III. 1. Montrer que le point C est l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{OB}$.
2. Déduire que le quadrilatère OACB est un losange.

IV. Vérifier que le point D est l'image du point B par la rotation du centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

V. Déterminer l'ensemble des point M(z) du plan qui vérifier $|z - d| = a$.

Exercice 4 (3points)

Un sac contient 8 boules indiscernables au toucher, 3 boules rouges portant les numéros 0,1,1 et 3 boules vertes portant les numéros 0,1,2 et 2 boules blanches portant les numéros 0,1.
On tire au hasard et simultanément 3 boules du sac.

1. Soient les deux les événements suivants :
   A: " tirer trois boules de chaque couleurs" et B: "tirer trois portant le numéro 0"
   a. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, puis déduire $P(A \cup B)$.
   b. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage au nombre des boules portant le numéro 1. Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance mathématique.

Problème (8 points)

I. Soit g une fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^2 \ln x - 2x - 1}{x^2}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$.
2. Montrer que $(\forall x \in I); g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$, puis dresser le tableau de variations de g.
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I, et que $\frac{51}{20} < \alpha < \frac{64}{20}$
   b. Montrer que $g(x) > 0$ pour tout x de $]\alpha; +\infty[$ et $g(x) < 0$ pour tout x de $]0; \alpha[$.

II. Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 - x\ln x}{xe^x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ puis interpréter le résultat géométriquement.
3. Vérifier que $\ln(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$ et que $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$.
4. a. Montrer que $(\forall x \in I); f'(x) = e^{-x} g(x)$.
   b. Déduire la monotonie de f sur I puis dresser le tableau de variations de f.
5. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.
6. Construire la courbe (C_f).
7. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.
   a. Montrer que $H: x \longmapsto e^{-x} \ln x$ est une primitive de f sur I.
   b. Calculer en cm² l'aire du domaine limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites $x = 3$ et $x = \lambda$.
   c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} A(\lambda)$.
8. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Dresser le tableau de variations de f^{-1} sur J.
   c. Calculer $f(1)$ puis montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{e}$
   d. Montrer que $(f^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = -e$.