المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵏⴰⵔⵉ

الامتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
الدورة العادية 2023
- الموضوع 16 -

ssssssssssssssssssssssss | SN F23

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée .**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient .**
- ✓ **L'utilisation de couleur rouge dans la rédaction des solutions est à éviter.**

COMPOSANTES DU SUJET

- **L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :**

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

	Exercice 1 (3 points)
	On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,25	1) a-Vérifier que : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,5	b- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \ 0 < u_n < \frac{1}{2}$
0,5	2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente
	3) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$
0,75	a-Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 6$ puis écrire v_n en fonction de n
0,75	b-Montrer que : $u_n = \frac{1}{2+6\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
0,25	c- Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $w_n = e^{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
	Exercice 2 (3 points)
	1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $z^3 - (1-\sqrt{2})z^2 + (1-\sqrt{2})z - 1 = 0$
0,25	a-Vérifier que $(\forall z \in \mathbb{C})$ $z^3 - (1-\sqrt{2})z^2 + (1-\sqrt{2})z - 1 = (z-1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)$
0, 5	b-Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
	2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A ; B et D d'affixes respectives : $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; $b = 1$ et $d = a + 1$
0,5	a- Déterminer la mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme le point B au point A
0,25	b- En déduire la nature du triangle OAB
0,25	c-Montrer que le point D est l'image du point B par la translation T du vecteur $\overrightarrow{OA}$
0,5	d- En déduire que le quadrilatère $OADB$ est un losange
	3) On considère le point Ω d'affixe $\omega = \frac{a}{2}$ et soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $2\|z\|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z = 0$
0,25	a-Vérifier que les points O et A appartiennent à (Γ)
0,5	b-Montrer que (Γ) est un cercle dont-on déterminera un diamètre
	Exercice 3 (3points)
	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : A(0,2,1) ; B(1,1,0) et C(2,1,1) et le plan (P) d'équation : $x + 2y - z + 3 = 0$
0,5	1) a-Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ et calculer l'aire du triangle ABC

0,5 b- En déduire que : $x + 2y - z - 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,25 c- Montrer que les plans (P) et (ABC) sont parallèles

2) Soit (S) la sphère tangente au plan (P) et tangente au plan (ABC) au point A

0,5 a- Calculer la distance $d(\mathrm{A}, (\mathrm{P}))$ puis en déduire que le rayon de la sphère (S) est $\frac{\sqrt{6}}{2}$

0,5 b-Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P)

0,25 c-Vérifier que : $\mathrm{E}(-1,0,2)$ est le point d'intersection de la droite (D) et du plan (P)

0,5 d-Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

Exercice 4 (3points)

Une urne contient trois boules blanches numérotées 0 ; 1 ; 2 et deux boules noires numérotées 1 ; 2 (Toutes les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) On considère les deux événements suivants :

A :'' Obtenir deux boules portants le numéro 1 ‘'
B :''la première boule tirée est blanche''

0,5 a-Montrer que : $p(A) = \frac{1}{10}$

0,75 b-Calculer $p(B)$ et montrer que : $p(A \cap B) = \frac{1}{20}$

0,25 c- Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire qui représente le produit des nombres portés par les deux boules tirées.

1 a-Recopier et compléter le tableau suivant (en justifiant les réponses)

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$				

0,5 b- Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Problème (8 points)

I) On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2 + x + e^{-x}$

0,25 1) a-Calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 b- Montrer que la fonction h est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

0,25 c-En déduire que $h(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

	II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
0,5	1) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
	2) Soit (Δ) la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$
0, 5	a-Montrer que (Δ) est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $+\infty$
0,25	b- Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ)
0,25	3) Etudier la branche infinie de de (C) au voisinage de $-\infty$
0,5	4) a-Montrer que : $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}h\left(-\frac{x}{2}\right)$ pour tout réel x
0,25	b-Dresser le tableau des variations de f
0,25	c-Montrer que l'équation $y = \frac{3}{2}x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
0,5	5) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α telle que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
0,5	6) a-Montrer que $f''(x) = \frac{(x-6)}{8}e^{-\frac{x}{2}}$ pour tout réel x
0,25	b- En déduire que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont-on déterminera les coordonnées
0,75	7) Construire la courbe (C) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
0,5	8) a-Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
0,5	b- calculer $(f^{-1})'(-1)$
0,5	c-Construire la courbe (C') de la fonction f^{-1} dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
	9) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) ; la droite (Δ) l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$
0,5	a-Montrer que : $f(x) - \frac{x}{2} = 1 + e^{-\frac{x}{2}} - 2f'(x)$ pour tout réel x
0,5	b- En déduire que : $\mathcal{A} = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}\ cm^2$