الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
دورة 2023
- الموضوع 15 -

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | SN F23

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵓⴳⵓⵔ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵡⵓⵔⵉⵡⵉⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

Exercice 1 : (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) Montrer que $u_n > \frac{3}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (0,75pt)

2) a- Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(2u_n - 3)^2}{4u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (0,25pt)

   b- Montrer que la suite (u_n) est convergente (0,5pt)

3) On pose $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

   a- Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison (0,75pt)

   b- Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{3}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$, pour tout n de $\mathbb{N}$ (0,5pt)

   c- Calculer la limite de la suite (u_n) (0,25pt)

Exercice 2 : (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On considère les vecteurs $\vec{u}(-2;0;0)$; $\vec{v}(0;-2;0)$ et les points $A(2;2;0)$ et D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{u} \wedge \vec{v})$

1) Montrer que le triplet des coordonnées du point D est $D\left(2;2;\sqrt{2}\right)$ (0,75pt)

2) Montrer que $z - \sqrt{2} = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) et qui passe par le point D et orthogonal à la droite (AD) (0, 5pt)

3) Soit (Δ) la droite qui passe par le point $B(0;2;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} - \vec{v}$

   a- Vérifier que $\begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) (0,25pt)

   b- Montrer que (Δ) et (P) sont parallèles (0,25pt)

4) Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 6 = 0$

   a- Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2;2;0)$ et pour rayon $R = \sqrt{2}$ (0,75pt)

   b- Montrer que la droite (Δ) est tangente à (S) (0,5pt)

Exercice 3 : (3 points)

I) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ (0,5pt)

II) Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$, on considère les points $A; B; C$ et D d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$; $b = 1 - i\sqrt{3}$; $c = -2$ et $d = 4 - 2i\sqrt{3}$

1) a- Ecrire $\dfrac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique (0,5pt)

b- En déduire la nature du triangle ABC (0,25pt)

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R

a- Montrer que : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 1 - i\sqrt{3}$ (0,25pt)

b- Vérifier que C est l'image de A par la rotation R (0,25pt)

3) On considère le nombre complexe $e = \sqrt{3} - 2 - i$

a- Montrer que $e = b\dfrac{ia+2}{a-2}$ (0,5pt)

b- Ecrire b et $\dfrac{ia+2}{a-2}$ sous forme trigonométrique (0,75pt)

c- En déduire que : $\overline{e} = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(cos\dfrac{7\pi}{12} + i\,sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$ (0,25pt)

d- En déduire que $cos\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ (0,25pt)

Exercice 4 : (3 points)

Une urne contient dix jetons : quatre jetons rouges numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 et six jetons noirs numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 indiscernables au toucher

1) On tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne

On considère les événements suivants : A : Obtenir au moins un chiffre pair

B : Le produit des chiffres obtenus est impair

C : Obtenir deux jetons de couleurs distinctes

Montrer que : $p(A) = \dfrac{7}{9}$; $p(B) = \dfrac{2}{9}$ et $p(C) = \dfrac{8}{15}$ (0,75pt)

2) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de couleurs obtenues

a- Déterminer la loi de probabilité de X (1pt)

b- Calculer $p_B\left((X=2)\right)$ la probabilité de l'événement $(X=2)$ sachant que l'événement B est réalisée. Les événements $(X=2)$ et B sont-ils indépendants ? (0,75pt)

3) On répète l'expérience précédente cinq fois de suite (à chaque fois on remet les deux jetons tirés avant d'effectuer le tirage suivant)

Quelle est la probabilité pour que l'événement B se réalise exactement deux fois ? (0,5pt)

Problème : (8points)

On considère la fonction numérique définie sur par : $f(x)=2e^{2x}-\sqrt{1+3e^{2x}}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité de mesure est : $1cm$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat (0,75pt)

   b- Vérifier que $f(x)=e^{x}\left(2e^{x}-\sqrt{\dfrac{1}{e^{2x}}+3}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (0,25pt)

   c- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat (0,75pt)

2) a- Montrer que $f'(x)=\dfrac{e^{2x}\left(48e^{2x}+7\right)}{\sqrt{1+3e^{2x}}\left(4\sqrt{1+3e^{2x}}+3\right)}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (0,5pt)

   b- En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (0,25pt)

   c- Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0 (0,5pt)

3) a- Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle qu'on doit déterminer (0,5pt)

   b- Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$ (0,75pt)

4) Construire (C_f) et $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (1,5pt)

5) a- Montrer que $\int_0^{\ln\sqrt{8}} e^{2x}\sqrt{1+3e^{2x}}\,dx=13$ (0,75pt)

   b- Déterminer V le volume engendré par la rotation complet de la courbe (C_f) sur $\left[0;\ln\sqrt{8}\right]$ au tour de l'axe des abscisses (0,75pt)

6) Construire la courbe de la fonction g définie sur $]-\infty;0]$ par : $g(x)=-f(x)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ par une autre couleur (0,25pt)