الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
دورة 2023
- الموضوع 11 -

ssssssssssssssssssssssss SN F23

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace.	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral, suites numériques.	11 points

- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (*3* points)

Une urne contient : 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a- Calculer les probabilités des deux évènements :

0,5 A : « Les trois boules tirées ont le même couleur »

0,5 B : « Obtenir au moins une boule blanche »

0,5 **b-** Montrer que : $P_B(A) = \frac{2}{17}$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2) On tire maintenant une boule de l'urne. Si cette boule est blanche, on la met de côté puis on tire une deuxième boule de l'urne. Si elle est noire, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage (des deux boules) associe le nombre de boules noires restantes dans l'urne.

0,25 **a-** Déterminer les valeurs prises par la variable X.

0,5 **b-** Montrer que : $P(X = 2) = \frac{23}{49}$

0,5 **c-** Déterminer la loi de probabilité de X.

0,5 **d-** Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice *2* : (*3* points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$,on considère les points :

$$A(1; 1; 0) ; B(0; 2; 0) ; C(0; 0; 3).$$

0,25 **1) a-** Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

0,25 **b-** Calculer l'aire du triangle ABC.

0,5 **c-** Calculer la distance du point B à la droite (AC).

0,5 **d-** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 **2)** Soit (D) la droite passant par C et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; -3)$.

Montrer que : $(D) \perp (BC)$

3) Soit (P) d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 1 = 0$ et (S_α) la sphère d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{5}{4} - \alpha = 0$$

0,5 Avec α est unreel strictement positif.

0,5 **a-** Déterminer en fonction de α,le centre Ω et le rayon R de la sphère (S_α).

b- Déterminer la valeur de α pour la quelle le plan (P) est tangente à la sphère (S_α) puis déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercice 3 : (*3* points)

0,5 **1)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2) Le plan complexe est rapport à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.On considère les points A ; B et C d'affixes respectives: $Z_A = 1$, $Z_B = 1 - 2i$ et $Z_C = -2 + 2i$ et soit (C) le cercle de diamètre [BC].

0,25 **a-** Déterminer Z_I l'affixe du point I le centre du cercle (C).

0,25 **b-** Calculer le rayon R de (C) .

3) Soit D un point d'affixe : $Z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

0,25 **a-** Déterminer la forme algébrique de Z_D.

0,5 **b-** Montrer que : $D \in (C)$.

4) Soit E le point d'affixe Z_E tels que $E \in (C)$ et $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IE}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

0,75 **a-** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $Z_E + \frac{1}{2}$.

0,5 **b-** En déduire que : $Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} i$

Problème : (11 points)

I) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^-$ par: $g(x) = (2 - x)e^x - 2$

0,5 **1) a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $g(0)$

0,5 **b)** Calculer $g'(x)$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^-$ et dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^-$

0,25 **2)** En déduire que: $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$: $g(x) \leq 0$.

II) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} f(x) = x\left(1 + (\ln(x))^2\right) & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{\mathbf{e^x} - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et (C) sa courbe représentative dans un repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **(unité : 2 cm).**

0,25 **1) a)** Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^+} x(\ln(x))^2 = 0$.

0,5 **b)** Montrer que f est continue en 0 .

0,5 **2)** Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche en 0, puis interpréter ces résultats graphiquement.

0,5 **3) a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

0,5 **b)** vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{\mathbf{x}} = +\infty$. Interpréter ce résultat graphiquement.

0,5 **c)** Etudier la branches infinies de (C) au voisinage de $+\infty$.

1 **4) a)** Montrer que : $\begin{cases} f'(x) = \left(1 + (\ln(x))\right)^2 & \text{si } x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{\mathbf{xg(x)}}{\mathbf{(e^x - 1)^2}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

0,5 **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0,25 **c)** Déterminer l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

0,5 **5)** Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite $(\Delta): y = x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

0,75 **6)** Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,5 **7) a)** Vérifier que la fonction $x \to \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x)$ est une fonction primitive de la fonction $x \to x^2(\ln(x))^2$ sur $[1, e]$

0,5 **b)** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

III) Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}^-$.

0,5 **1)** Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0,5 **2) a)** Tracer la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère orthonormé$(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,25 **b)** A partir de la courbe de h^{-1} déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{h^{-1}(x)}{x}$

IV) On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1 + (\ln(u_n))^2\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,5 **1)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < 1$.

0,5 **2)** Etudier la monotonie de la suite (u_n).

0,75 **3)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.