الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية

دورة 2023

- الموضوع 08 -

sssssssssssssssssssssss

SN F23

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

	Exercice 1 : **(3 points)**
	Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *, On considère les points* $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-3;2;5)$ *et Soit* (P) *un plan d'équation :* $x-y-z+2=0$
0.75	*1) a) Montrer que* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}-\vec{k}$.
0. 5	*b) En déduire une équation cartésienne du plan* (ABC).
0.5	*2) Montrer que* $(ABC)\perp(P)$.
	3) Soit (S) *l'ensemble des points* $M(x;y;z)$ *de l'espace vérifient* $x^2+y^2+z^2-2y-2z+1=0$.
0.5	*a) Montrer que* (S) *est une sphère de centre* $\Omega(0;1;1)$ *et de rayon* $R=1$.
0. 75	*b) Calculer la distance du point* Ω *au plan* (P), *puis déterminer l'intersection du plan* (P) *et la sphèr* (S)
	Exercice 2 : **(3 points)**
0.5	*1) Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2-2z+5=0$.
	2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$. *On considère les points* A , B , C *et* Ω *d'affixes respectives* $a=1+2i$, $b=-3$, $c=-i$ *et* $\omega=-1+i$.
0.75	*a) Vérifier que* $c-\omega=e^{-i\frac{\pi}{2}}(a-\omega)$ *et en déduire que* $\Omega C=\Omega A$ *et que* $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$.
	b) Soit R *la rotation de centre* Ω *et d'angle* $\frac{-\pi}{2}$.
0.75	*Montrer* $R(C)=B$ *et en déduire la forme exponentielle de* $\frac{b-\omega}{c-\omega}$.
	3) Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$
0.25	*a) En utilisant la formule de Moivre montrer que :* $1+\cos(2\alpha)=2\cos^2(\alpha)$ *et* $\sin(2\alpha)=2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$
0. 75	*b) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe* $u=1+e^{i\alpha}$.
	Exercice 3 : **(3 points)**
	Une urne contient 10 boules portant les nombres ***1,2,2,3,3,3,4,4,4,4****. (les boules sont indiscernables au toucher)*
	On tire au hasard, successivement et sans remise, 2 boules de l'urne.
0.75	*1) Soit* A *l'événement : « Obtenir deux boules portant deux nombre pairs »* *Montrer que :* $p(A)=\frac{1}{3}$.
	2) On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X *la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement* A *est réaliser.*
1.5	*a) Montrer que* $p(X=1)=\frac{4}{9}$ *puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire* X .
0.75	*b) Calculer* $E(X)$ *et* $\sigma(X)$.

Exercice 4 : (3 points)

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

0.5 — 1) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $2 \le u_n \le 4$.

0.5 — 2) *Montrer que* (u_n) *est croissante.*

0.5 — 3) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N})$: $4 - u_{n+1} \le \frac{4 - u_n}{2}$.

0.5 — 4) *En déduire que* $4 - u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$. *Et calculer* $\lim u_n$.

5) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose* $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1 — *Montrer que* $S_n \ge 4n - 2 + \frac{1}{2^n}$

Problème : (8 pts)

Partie1 *: On considère la fonction* g *définie sur* $]1;+\infty[$ *par :* $g(x) = 2x^2 - (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)$.

0.5 — 1) a) *Calculer* $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)$ *en déduire que* $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 2$.

0.5 — b) *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

0.25 — 2) a) *Montrer que* $\forall x \in]1;+\infty[$; $g'(x) = -2x(\ln(x^2 - 1) - 1)$.

0.5 — b) *Résoudre dans* $]1;+\infty[$ *l'inéquation* $\ln(x^2 - 1) - 1 \ge 0$.

0.25 — c) *Donner le tableau de variations de* g *(N.B. :* $g(\sqrt{e+1}) = e + 2$ *).*

0.5 — 3) a) *Montrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une seule solution* α *dans l'intervalle* $[\sqrt{e+1};+\infty[$.

(On admet que g *est continue sur* $]1;+\infty[$*)*

0.25 — b) *Montrer que* $g(x) \ge 0$ *sur* $]1;\alpha]$ *et* $g(x) \le 0$ *sur* $[\alpha;+\infty[$.

Partie2 *: Soit* f *la fonction numérique définie sur* $]1;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$.

Et soit (ζ_f) *la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5 — 1) *Calculer* $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ *et interpréter le résultat graphiquement.*

0.5 — 2) *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ *et interpréter le résultat graphiquement.*

0.5 — 3) a) *Montrer que* $\forall x \in]1;+\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x^2 - 1)}$.

0.5 — b) *Montrer que* f *est croissante sur* $]1;\alpha]$ *et décroissante sur* $[\alpha;+\infty[$.

0.25 — c) *Donner le tableau de variations de* f.

0.5 — 4) *Résoudre dans* $]1;+\infty[$ *l'équation* $f(x) = 0$ *et interpréter le résultat graphiquement.*

1 — 5) *Construire* (ζ_f). *(On admettra que* $\alpha \approx 3{,}2$ *,* $f(\alpha) \approx 0{,}69$ *, la courbe* (ζ_f) *possède un point d'inflexion dont l'abscisse est supérieure à* 5 *).*

	Partie 3 :
0. 5	*1) Montrer que* $(\forall x \in \left[\sqrt{2};+\infty\right[);0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln(x^2)}{x}$.
0.5	*2) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que* $\int_{\sqrt{2}}^{e^2} \dfrac{\ln(x^2)}{x} = \dfrac{16-(\ln(2))^2}{4}$
0. 5	b) *Déduire un encadrement de l'aire du domaine plan délimité par la courbe* (ζ_f), *l'axe des abscisses et les droites d'équations* $x=\sqrt{2}$ *et* $x=e^2$