الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية

دورة 2023

- الموضوع 06 -

ssssssssssssssssssssssss SN F23

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

3h	مدة الإنجاز		الرياضيات		المادة
7	المعامل		شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)		الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 points)

$(\boldsymbol{u_n})$ la suite définie par: $\boldsymbol{u_0 = 3}$ *et* $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$: $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}}$

0.5 1) Montrer par récurrence que: $(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$; $\boldsymbol{2 < u_n < 4}$.

0.5 2) Etudier la monotonie de $(\boldsymbol{u_n})$ et déduire qu'elle convergente

3) Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on pose: $\boldsymbol{v_n = \frac{U_n-4}{U_n-2}}$

0.5 a-Montrer que la suite $(\boldsymbol{v_n})$ est géométrique

0.5 b- Exprimer $\boldsymbol{v_n}$ et $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n}$

0.25 4) a-Montrer que:$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$; $\boldsymbol{4 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(4 - u_n)}$

0.5 b-En déduire que:$(\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$; $\boldsymbol{4 - u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n}$

0.25 c-Déduite une autre fois $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n}$.

Exercice 2 : **(3 points)**

Une urne contient : 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a) Calculer les probabilités des deux évènements :

0.5 $\boldsymbol{A}$: « Les trois boules tirées ont le même couleur»

0.5 $\boldsymbol{B}$: « Obtenir au moins une boule blanche»

0.5 b) Montrer que :$\boldsymbol{P_B(A) = \frac{2}{17}}$ Les évènements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont-ils indépendants ?

2) On tire maintenant une boule de l'urne. Si cette boule est blanche, on la met de côté puis on tire une deuxième boule de l'urne .Si elle est noire, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule de l'urne.

Soit $\boldsymbol{X}$ la variable aléatoire qui ,à chaque tirage(des deux boules) associe le nombre de boules noires restantes dans l'urne.

0.5 a) Déterminer les valeurs prises par la variable $\boldsymbol{X}$.

0.5 b) Montrer que :$\boldsymbol{P(X = 2) = \frac{23}{49}}$

0.5 c) Déterminer la loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$.

Exercice 3 : **(3 points)**

On considère la sphère $(\boldsymbol{S})$ d'équation cartésienne :

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0}$$

Et soit $(\boldsymbol{P})$ le plan d'équation : $\boldsymbol{x + 2y + z - 1 = 0}$

0.5 1) Montrer que le centre de la sphère $(\boldsymbol{S})$ est le point $\boldsymbol{I(2; 3; -1)}$ et que son rayon $\boldsymbol{R}$ est 3.

0.5 2)a) Montrer que $\boldsymbol{d(I; (P)) = \sqrt{6}}$.

0.5 b) En déduire que le plan $(\boldsymbol{P})$ coupe la sphère $(\boldsymbol{S})$ selon un cercle $(\boldsymbol{\Gamma})$ de rayon $\boldsymbol{\sqrt{3}}$.

0.5 3)a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\boldsymbol{D})$ passant par $\boldsymbol{I}$ et orthogonale au plan $(\boldsymbol{P})$.

0.5 b) Montrer que le centre de $(\boldsymbol{\Gamma})$ est $\boldsymbol{H(1; 1; -2)}$.

0.5 4) Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plants tangents à $(\boldsymbol{S})$ et paralléle à $(\boldsymbol{P})$.

Exercice 4 (… points)

1) On le nombre complexe $\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}$

0. 5 a) Ecrire a sous forme trigonométrique et déduire que $\mathbf{a^{2024}} \in \mathbb{R}$

0.25 b) On pose $\mathbf{b} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$;prouver que $\mathbf{b^2 = a}$

2) Dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}; \vec{\mathbf{v}})$, on considère les points $\mathbf{A(a)}$; $\mathbf{B(b)}$; $\mathbf{C(c)}$ tel que : $\mathbf{c = 1}$ et la rotation R de centre $\mathbf{O}$ et d'angle $\frac{\pi}{8}$ et M'(z') l'image de M(z) par R

0.5 a)Vérifier que : $z' = \mathbf{bz}$

0.5 b)Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R

0.25 3)a) Montrer que $|\mathbf{a - b}| = |\mathbf{b - c}|$ et déterminer la nature du triangle ABC

0.25 b) Déterminer une mesure de$(\overrightarrow{\mathbf{BA}}; \overrightarrow{\mathbf{BC}})$

4) Soit T la translation de vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{D(d)}$ l'image de point A par la translation T ;

0.25 a) Vérifier que : $\mathbf{d = b^2 + 1}$

0.75 b)Montrer que $\frac{\mathbf{b^2+1}}{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \bar{\mathbf{b}}$ et déduire que O ; B et D sont alignés

Problème (… points)

Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie sur $]\mathbf{0}; +\infty[$ par $\boldsymbol{g(x) = 1 + x + \ln x}$

0.5
0.25 1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

0.5 2)a)Montrer que $\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur $]\mathbf{0}; +\infty[$

b)Montrer que l'équation $\boldsymbol{g(x) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $]\mathbf{0}; +\infty[$ et que $\frac{1}{5} < \boldsymbol{\alpha} < \frac{1}{2}$.

0.25 (***On donne*** $\boldsymbol{g\left(\frac{1}{5}\right) \cong -0,4}$)

3) Déduire le signe de $\boldsymbol{g(x)}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[$

B) Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur $[\mathbf{0}; +\infty[$ par : $\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = \frac{4x\ln x}{1+x}; x > 0} \\ \boldsymbol{f(0) = 0} \end{cases}$

Et $(\boldsymbol{C_f})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{\imath}}; \vec{\boldsymbol{\jmath}})$.(unité 2cm)

0.5 1)a) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est continue à droite en 0.

0.75
0.5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f(x) = +\infty}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \mathbf{0}$, puis interpréter graphiquement le résultat.

0.5 2)a)Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter le résultat géom

0.5 b) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[$: $\boldsymbol{f'(x)} = \frac{4g(x)}{(x+1)^2}$

c) Déduire que $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[\boldsymbol{\alpha}; +\infty[$ et strictement décroissante sur

0.5 l'intervalle $[\mathbf{0}; \boldsymbol{\alpha}]$

0.5 d)Montrer que$\boldsymbol{f(\alpha) = -4\alpha}$ et dresser le tableau de variations de $\boldsymbol{f}$

0.5 3)a) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[$: $\boldsymbol{f''(x)} = \frac{4(1-x^2-2x\ln x)}{x(x+1)^3}$

0.25 b) Etudier le signe de $\mathbf{1} - \boldsymbol{x^2}$ et $-\mathbf{2}\boldsymbol{x\ln x}$ sur $]\mathbf{0}; +\infty[$ et en déduire que le point d'abscisse 1 est l'unique point d'inflexion de $(\boldsymbol{C_f})$.

1 c)Donner l'équation de la tangente $(\boldsymbol{T})$ à $(\boldsymbol{C_f})$au point d'abscisse1

4) Tracer $(\boldsymbol{T})$ et $(\boldsymbol{C_f})$ dans le repère $(\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{\imath}}; \vec{\boldsymbol{\jmath}})$.(on donne $\boldsymbol{\alpha \approx 0.25}$)

C) Soit $\boldsymbol{h}$ la restriction de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle $[\boldsymbol{\alpha}; +\infty[$.

0.5 1) Montrer que $\boldsymbol{h}$ admet une fonction réciproque $\boldsymbol{h^{-1}}$ définie $\boldsymbol{J}$ à déterminer

0.75 2) Montrer que $\boldsymbol{h^{-1}}$ est dérivable en $\mathbf{0}$ puis Calculer $(\boldsymbol{h^{-1}})'(\mathbf{0})$.