الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
دورة 2023
- الموضوع 05 -

ssssssssssssssssssssssss | SN F23

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵏⵏⴰⵣⵣⵓⵍⵜ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Calcul de probabilités.	3 points
Exercice 3	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 4	Nombres complexes.	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 points)

Soit (u_n) une suite tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{21+u_n} \quad et\ U_0 = 1$$

0.5 1) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 0$

0.5 2) Montrer que ; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq \frac{1}{7} U_n$

0.5 3) En déduire la monotonie de (u_n)

0.5 4) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n \leq (\frac{1}{7})^n$

0.25 puis calculer la limite de (u_n)

0.75 5) On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \sqrt{9 - 2u_n}$,

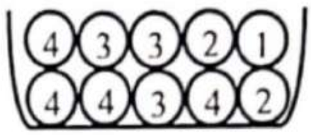
Calculer la limite de (v_n)

Exercice 2 : (3 points)

Une urne contient 10 boules portant les numéros :

1 ;2 ;2 ;3 ;3 ;3 ;4 ;4 ;4 ;4. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.



1) Soit l'événement :

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

0.5 Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$

0.5 2) On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

0.5 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisation de l'événement A.

a) Montrer que : $P(X = 1) = \frac{4}{9}$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.

c) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ puis l'écart type $\sigma(X)$.

0.5

Exercice 3 : (3 points)

0.5

0.5

Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \text{ et } (P) \text{ le plan d'équation : } y + z - 1 = 0.$$

1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R

2) Montrer que le plan (P) est tangente à la sphère (S) et déterminer leur point d'intersection.

3) Soit (Q) le plan d'équation: $2x - y + z + 1 = 0$.

Montrer que : $(P) \perp (Q)$

4) Soit la droite (D) ***l'intersection des plans*** (P) ***et*** (Q)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

5) a) Montrer que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en un point à déterminer.

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) selon un cercle dont on précisera le centre et le rayon

Exercice 4

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(\mathbf{E}): \mathbf{z^2 - 2(1 - \sqrt{2})z + 2(2 - \sqrt{2}) = 0}$$

0.5 1) Vérifier que : $\Delta = -4$

0.25 2) En déduire les solutions $\mathbf{z_1}$ **et** $\mathbf{z_2}$ de (E)

0.5 B)1) On pose : $\mathbf{u = 1 - \sqrt{2} - i}$; calculer $|\mathbf{u}|$

2) Montrer que $(\mathbf{1 + i})\mathbf{u} = -\sqrt{\mathbf{2}} \times \bar{\mathbf{u}}$

0.5 3) a)Déduire que $\mathbf{arg(u)} \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

0.25 b) Montrer que : $u^4 = i\left(\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right)^4$

C)On considère **les pointsE** ; F et G d'affixes respectifs :

$\mathbf{z_E = 1 + i}$ **et** $\mathbf{z_F = 1 - i}$ et $\mathbf{z_G = -i\sqrt{3}}$

0.25 1) Soit N l'image du point F par l'homothétie h de centre G et de rapport 2

0.25 Montrer que : $\mathbf{z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)}$

0.75 2) R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et A l'image du point G et C est l'image de N par R

Montrer que : $\mathbf{z_A = \sqrt{3}}$ et $\mathbf{z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i}$

0.5 3) T la translation de vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ d'affixe $\mathbf{2i}$ et B l'image du point N et D est l'image de G par T

0.25 Montrer que : $\mathbf{z_B = 2 + i\sqrt{3}}$ et $\mathbf{z_D = (2 - \sqrt{3})i}$

0.5 4)a) Montrer que E est le milieu de $[\mathbf{AC}]$ et $[\mathbf{BD}]$

b) Vérifier que : $\frac{\mathbf{z_C - z_E}}{\mathbf{z_B - z_E}} = \mathbf{i}$; puis en déduire la nature du triangle BCE

0.25 c) Déduire que le quadrilatère ABCD est un carré

Problème

0.5 A) Soit g une fonction définit sur $]\mathbf{0}; +\infty[$par : $\mathbf{g(x) = x\,\mathit{ln}\,\mathit{x} - \mathit{x} + 1}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(\mathbf{x})$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(\mathbf{x})$

0.75 2) Montrer que : $\forall \mathbf{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[$; $g'(\mathbf{x}) = ln(\mathbf{x})$

0.5 3) Dresser le tableau de variations de g sur $]\mathbf{0}; +\infty[$

4) Montrer que : $\forall \mathbf{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[; g(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$

0.5 B) f une fonction définit sur $I =]\mathbf{0}; +\infty[$ par : $\mathbf{f(x) = (\mathit{ln}\,\mathit{x} - 1)\,e^{\mathit{x}-1}}$

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{f(x)} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

0.5 2) Etudier la branche infinie de $(\mathbf{C_f})$ au voisinage de $+\infty$

0.5 3)a) Montrer que : $\forall \mathbf{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[; \mathbf{f'(x)} = \frac{g(x)}{x}\mathbf{e}^{x-1}$

0.5 b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse

0.5 c) Déterminer l'équation de la tangente (T) de $(\mathbf{C_f})$ au point 1

4) Soit h une fonction définit sur I par : $\mathbf{h(x) = 2\mathit{x} + \mathit{x}^2\mathit{lnx} - \mathit{x}^2 - 1}$

x	0	$+\infty$
$h(\mathbf{x})$	-1 ↗	$+\infty$

a) Calculer h(1) puis déterminer le signe de h sur $\boldsymbol{I} =]\mathbf{0}; +\infty[$

b) Montrer que : $\forall \mathbf{x} \in]\mathbf{0}; +\infty[; \mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{h(x)}}{x^2}\mathbf{e}^{x-1}$

c) Etudier la convexité de $(\mathbf{C_f})$ puis justifier que la courbe $(\mathbf{C_f})$ admet un point d'inflexion unique au point d'abscisse 1

5) Résoudre dans $\boldsymbol{I}$ l'équation $\mathbf{f(x) = 0}$ puis interpréter le résultat géométriquement

6) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur un intervalle J à déterminer

7) Tracer et $(\mathbf{C_f})$ et (Cf^{-1}) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$