الإمتحان الوطني التجريبي الموحد للباكالوريا المسالك الدولية
دورة 2023
- الموضوع 04 -

ssssssssssssssssssssss SN F23

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	المعامل	7

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice quelconque n'est pas autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Calcul de probabilités.	2.75 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes.	3.25 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral, Suites numériques	11 points

- ✓ ln Désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (2.75 points)

On considère trois urnes U_1, U_2 *et* U_3.

U_1 Contient quatre boules vertes et 2 boules rouges.

U_2 Contient quatre boules rouges et 2 boules jaunes.

U_3 Contient trois boules rouges et 2 boules vertes.

On prend une urne parmi les trois. Après on tire de cette urne choisis au hasard et simultanément deux boules.

0,25 — 1) Calculer la probabilité de choisir une urne $U_i, avec\ i \in \{1,2,3\}$.

2) On suppose qu'on a choisis U_2.

0.25 — a) Donner le cardinal des cas possibles.

b) On considère les évènements :

A : « tire une boule jaune et une boule rouge »

B: « tire deux boules ont même couleurs »

1 — i) Calculer $p(A)$ *et* $p(B)$.

0.75 — ii) Calculer $p(A \cap B)$.

0,5 — iii) Déduire $p(A \cup B)$.

Exercice 2 : (3 points)

On considère les ensembles suivants :

$C = \{M(x, y, z)\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\ \}$.

$\Gamma = \{M(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z - 4y = -7\}$.

F : *Le cercle de centre* $B(1,2,1)$ *et de rayon* 1.

Soient les points suivants $A(0,0,1), D(0,-2,0), k\left(-\frac{1}{5}, 0,1\right)$.

1)

0.25 — a) Déterminer $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{Ak}$.

0.25 — b) Déduire l'équation cartésienne du plan (ADK).

0.25 — 2) Montrer que C est une sphère en déterminant le centre et le rayon R_1.

3)

0.25 — a) Prouver que le plan (ADK) est tangente au sphère C.

0.25 — b) Déterminer le point d'intersection entre le plan (ADK) et la sphère C.

4)

0.25 — a) Montrer que Γ est une sphère et en déterminer le centre Ω et sa rayon R_2.

0.25 — b) On considère la représentation paramétrique suivante de la droite (Δ).

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \quad avec\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Vérifier que $\Omega \in (\Delta)$.

0.25 — c) Déduire que (Δ) est perpendiculaire au plan (ADK).

0.5 — d) Calculer la distance entre Ω et le plan (ADK), puis déduire la nature de l'ensemble d'intersection du plan (ADK) avec la sphère Γ.

0.25 — e) Vérifier que le point $B(1,2,1) \in (\Delta) \cap (ADK)$.

0.25 — f) Déduire que $F = \Gamma \cap (ADK)$.

Exercice 3 (3.25points)

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E): $z^2 - z + 1 = 0$.

0.5 1) Résoudre l'équation E.

0.5 2) On note a et b les deux solutions de (E) tels que $Im(a) > 0$.
Ecrire a et b sous la forme trigonométrique .

3) On considère l'équation (F): $z^3 + (i-1)z^2 + (1-i)z + i = 0$.

0 .25 a) Vérifier que $(z^2 - z + 1)(z + i) = z^3 + (i-1)z^2 + (1-i)z + i$.

0 .25 b) Déduire les solutions de (F) dans $\mathbb{C}$. On note la troisième solution c.

Partie II :

Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $K(z = \frac{2}{5} + i\frac{1}{2})$ quatre points du plan :

0.25 1) Déterminer l'affixe du point I le milieu de segment $[AB]$.

0.5 2) Montrer que les points A, k et C sont alignés.

0.5 3) Montrer que le triangle OIC est rectangle en O.

0.5 4) Montrer que les droites (OC) et (IB) sont parallèles .

Problème (11 points)

Partie I :

A)

Soit g une fonction définie par : $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$.

0,25 1) Déterminer D_g.

0,5 2) Montrer que $\forall\, x \in D_g$, on a $g'(x) = -\ln(x+1)$.

0,5 3) Montrer $\forall x \in]-1,0]$, $on\ a$ $g'(x) \geq 0$ et $\forall x \geq 0$, $on\ a$ $g'(x) \leq 0$.

0.25 4) Dresser le tableau de variations de g.

0,25 5) En déduire que $\forall x \in D_g$; $g(x) \leq 0$.

B) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g'(u_n) \end{cases}$

0.25 1) Calculer u_1, $u_2 et\ u_3$.

0.25 2) En déduire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante que l'on déterminera.

3) On pose $v_n = u_{n+1} + e^{\frac{n-g(n)}{n+1}} - 1, pour\ tout\ n \geq 0$.

0.25 a) Donner l'expression de v_n en fonction seulement de n.

0.25 b) Déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison.

0.25 c) Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$.

0.25 d) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

4) On pose $w_n = \frac{2S_n}{n^2}$, Pour tout $n \geq 1$.

0,5 a) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ Ind (faire un changement de variable $t = \frac{1}{n}$).

0.5 c) Déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} (w_n)^n = e$.

Partie II :

On considère la fonction suivante : $f(x) = \frac{\ln(x+1)-x}{x}$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité :1cm).

0,25 1) Déterminer D_f.

2)

0.75 a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$, puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

0.25 b) Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$.

0.75 c) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, f est-elle continue à droite en -1 ? interpréter le résultat.

0.75 3) Montrer que f est une fonction dérivable sur D_f, puis prouver que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

0.5 4) Dresser le tableau de variations de f.

1 5) Tracer le courbe C_f.

Partie III :

On pose h la fonction définie par $h(x) = \frac{g(x)}{x} + f(x) + x$. Pour $x \in]-1,+\infty[-\{0\}$.

0.5 1) Montrer que $\forall x \in D_h$; $h(x) = x - ln(1+x)$.

1 2) En utilisant l'intégration par parties calculer :

$$I = \int_1^2 \ln(1+x)\,dx.$$

3) La figure ci-contre est présentée C_h la courbe de la fonction h dans la même repère mentionnée dans la partie II.

0.5 Calculer l'aire de la partie hachurée de la figure.