1 / 10	الإمتحان التجريبي للباكالوريا المسالك الدولية 2024 النموذج الثاني	المملكة المغربية ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⵓⵏⵖ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵜ
2	RRRRRRRRRRRRRRRR	M2-24
Prof Fayssal		

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	شعبة العلوم التجريبية مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسي)	الشعبة أو المسلك

Examen blanc de baccalauréat 2024 corrigé

Correction du modèle 02

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ **L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;**
- ✓ **Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;**
- ✓ **L'utilisation de couleur rouge de la rédaction des solutions est à éviter**

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendant entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Nombres complexes et calcul de probabilités.	6 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique, calcul intégral , suite	11 points

- ✓ **On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.**
- ✓ **ln désigne la fonction logarithme népérien .**

Exercice 1 (6 points) :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé, considérons les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$; $D(d)$ tel que : $a = 1 + i$; $b = \overline{a}$; $c = -1 + i$ et $d = -a$

0,75 **1)** a) Déterminer la forme trigonométrique de a et c et vérifier que $OA = OC$

0,5 b) En déduire que les points A ; B ; C et D appartenant au même cercle (C) et déterminer le centre et le rayon du cercle (C)

0,5 **2)** a) Montrer que $b - a = i(c - a)$ et déduire la nature du triangle ABC

0,5 b) Déduire que B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

0,5 c) Déterminer l'image du point B par la tarnslation T de vecteur $\overrightarrow{AC}$

0,5 d) Déduire que le quadrilatère ABDC est un carré

3) On considére le point E d'affixe $e = 1 + 2i$

0,25 a) Vérifier que $\frac{b-a}{e-a} = -2$

0 ,5 b) En déduire que B est l'image de E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2

4) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher , six boules portant les nombres complexes a ; b ; c ; d ; 1 et -1 et quatre boules portant les nombres complexes i ; $-i$; $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne

0,25 a) Calculer $P(A)$ où A" Les boules tirées portant des nombres réels "

0,5 b) Calculer $P(B)$ où B: " Les boules tirées portant des nombres complexes dont un argument θ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$"

0,5 c) Calculer $P(C)$ où C: " Parmi les boules tirées au moins une boule portant un nombre complexe dont le module est égale à $\sqrt{2}$ "

0,75 d) Calculer $P_B(A)$; la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé . Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse ?

Exercice 2 (3 points) :

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A\,(-1\,, 0\,;\ 1)$ et $B\,(1\,;\ 2\,;\ 0)$ et le plan (P) d'équation $2x + 2y - z + 3 = 0$

0,25 **1)** a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan (P)

0,25 b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1\,; \frac{1}{2}\,; \frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$

0,5 a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0,25 b) Montrer que la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I (On ne demande pas de déterminer les coordonnées de I)

0,75 c) Montrer que la droite (AB) est tangente à la sphère (S) au point $C\,(0\,; 1\,; \frac{1}{2})$

3) Soit (Q) le plan parallèle à (P) et tangente à (S) en un point J (On ne demande pas de déterminer les coordonnées de J)

0,5 a) Montrer que les points I ; Ω et J sont alignés

0,5 b) En déduire que $\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega J} = -\frac{9}{4}$

Problème (11 points) :

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x^2+1)e^{-x}.$$

1) Montrer que $g'(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le sens de
0,75 **variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$**

0,75 **2) Vérifier que : $g(0) = 0$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.**

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + (x^2+2x+3)e^{-x}.$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (unité :1 cm).

0,5 **1) a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.**

0,5 **b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$**

0,5 **c) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$**

0,5 **2) a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2+2x+3 + xe^x - e^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.**

0,5 **b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.**

0,5 **3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.**

0,5 **b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.**

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Soit h la fonction définie $\mathbb{R}$ sur $h(x) = f(x) - x$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$

0,75 **a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2; 3[$(On prend : $f(2) \simeq 2.4$ et $f(3) \simeq 2.8$)**

0,75 **b) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ) sur intervalle$]-\infty; \alpha]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$**

1 **5) Construire (D); (Δ) et (C) dans le même repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$.**

0,75 **6) a) Montrer que la fonction $x \to (x^2+2x+2)e^{-x}$ est une primitive de la Fonction $x \to -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = \frac{2e-5}{e}$**

0,5 **b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \frac{e-2}{e}$**

0,5 **c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.**

III) Soit(u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 **1) Montrer que $2 \le u_n \le \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,5 **(On pourra utiliser le résultat de la question II) 4. b))**

0,75 **3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite**

Correction de l'exercice 1 (6 points) :

On cosnidère les points $A(a)$; $B(b)$; $C(c)$ $D(d)$ tel que : $a = 1 + i$; $b = 1 - i$; $c = -1 + i$ et $d = -1 - i$

1) a) Déterminer la forme trigonométrique de a et c et vérifier que OA=OC

$|a| = |c| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$a = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$c = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\pi - \frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$OA = |a| = \sqrt{2}$ et $OB = |b| = \sqrt{2}$ donc $OA = OC$

b) Déduire que les points A ; B ; C et D appartenant au même cercle (C) en déterminant le centre et le rayon de (C)

On a $|a| = |b| = |c| = |d| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Donc $OA = OC = OB = OD$

Donc A ; B ; C et D appartenant au même cercle (C) de centre O et le rayon $\sqrt{2}$

2)a) Montrer que $b - a = i(c - a)$ *et* déduire la nature du triangle ABC

$$b - a = 1 - i - (1 + i) = -2i \quad et \quad i(c - a) = i(-1 + i - (1 + i)) = i(-2) = -2i$$

Donc $b - a = i(c - a)$

On a $b - a = i(c - a)$

Donc $|b - a| = |i(c - a)|$

Donc $|b - a| = |i||i(c - a)|$

Donc $|b - a| = |c - a|$ car $|i| = 1$

Donc $AB = AC$

Et on a $b - a = i(c - a)$ donc $\frac{b-a}{c-a} = i$

Donc $arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) \equiv \arg(i)[2\pi]$

Donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc le triangle ABC est isocèle est rectangle en A

b) Déduire que le point B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $b - a = i(c - a)$

Donc $b - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$ car $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Donc le point B est l'image du point C par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

c) Déterminer l'image du point D par la tarnslation T de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Soit B'(b') l'image de B par T

$$T(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow b' - b = c - a$$
$$\Leftrightarrow b' = c - a + b$$
$$\Leftrightarrow b' = -1 + i - 1 - i + 1 - i$$
$$\Leftrightarrow b' = -1 - i$$
$$\Leftrightarrow b' = d$$

Donc $T(B) = D$

d) Déduire que le quadrilatère ABDC est un carré

On a $T(B) = D \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ donc ABDC est un parrallélogramme

Et on a $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc ABDC est un réctangle

Et on a $AB = AC$ donc ABDC est un losange

D'où ABCD est un carré

3)On considére le point E d'affixe $e = 1 + 2i$

a) Montrer que $\frac{b-a}{e-a} = -2$ puis déduire que les points A ; B et E sont alignés

$$\frac{b - a}{e - a} = \frac{1 - i - 1 - i}{1 + 2i - 1 - i} = \frac{-2i}{i} = -2$$

b) Déduire que le point B est l'image du point E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2

On a $\frac{b-a}{e-a} = -2$

Donc $b - a = -2(e - a)$

Donc $\overrightarrow{AB} = -2\,\overrightarrow{AE}$

Donc le point B est l'image du point E par l'homothétie h de centre A et de rapport -2

5) Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher , six boules portant les nombres complexes a ; b ; c ; d ; 1 et -1 et quatre boules portant les nombres complexes i ; $-i$; $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne

a) Calculer $P(A)$ où A" Les boules tirées portant des nombres réels "

A" $1 ; -1 ; -\sqrt{2} ; \sqrt{2}$ "

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{4\times3}{2}}{\frac{10\times9}{2}}$$

$$= \frac{4\times3}{10\times9} = \frac{2}{15}$$

Donc $P(A) = \frac{2}{15}$

b) Calculer $P(B)$ où B: " Les boules tirées portant des nombres complexes dont un argument θ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$"

$a = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$b = 1 - i = \bar{a} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$c = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$d = -1 - i = \bar{c} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{0}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

B" a ; 1; b ; $\sqrt{2}$; i ; $-i$"

$$P(B) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{6\times5}{2}}{\frac{10\times9}{2}}$$

$$= \frac{6\times5}{10\times9} = \frac{1}{3}$$

Donc $P(B) = \frac{1}{3}$

c) Calculer $P(C)$ où C: " Parmi les boules tirées au moins une boule portant un nombre complexe dont le module est égale à $\sqrt{2}$ "

C" a ; b ; c ; d ; ; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ "

$\overline{C}$" i ; $-i$; -1 ; 1 "

$$P(\overline{C}) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = P(A)$$

Donc $P(C) = 1 - P(A)$

$$= \frac{13}{15}$$

d) Calculer $P_B(A)$; la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé .

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$A \cap B$: Les boules tirées portant des nombres réels dont un argument θ tel que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$A \cap B$: $\{1; \sqrt{2}\}$

Donc

$$P(A \cap B) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10\times9}{2}} = \frac{1}{45}$$

Donc

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{15}$$

Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse ?

<u>Rappel :</u>

<u>Indépendance de deux événements</u>

* On dit que les événements A et B sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

* Les événements A et B sont indépendants si et seulement $P_A(B) = P(B)$; avec $P(A) \neq 0$

On a $P_B(A) \neq P(A)$

Donc les événements A et B ne sont pas indépendants

L'espace est menu d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient les points $A(-1,0;\ 1)$; $B(1;\ 2;\ 0)$ et le plan (P) d'équation $2x+2y-z+3=0$

1) a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan (P) : $2x+2y-z+3=0$

On a $\overrightarrow{AB}(2,2;\ -1)$

Donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan (P)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB)

Rappel : DROITE DANS L'ESPACE

Soit (D) la droite passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{U}(a;b;c)$

Une représentation paramétrique de (D)

$$(D):\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\\ z=z_A+ct\end{cases}\ ;\ (t\in IR)$$

On a la droite (AB) passe par $B(1;\ 2;\ 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2,2;\ -1)$

$$\text{Donc }(AB):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-t\end{cases}\ ;\ (t\in IR)$$

2) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1;\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ et de rayon $r=\frac{3}{2}$

a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

$$(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=r^2$$

$$(S):(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{3}{2})^2=(\frac{3}{2})^2$$

$$(S):(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$$

b) Montrer que la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I

On a $\Omega(1;\frac{1}{2};\frac{3}{2})$ et (P) $2x+2y-z+3=0$

$$d(\Omega;(P))=\frac{|2x_\Omega+2y_\Omega-z_\Omega+3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{\left|2+1-\frac{3}{2}+3\right|}{\sqrt{9}}=\frac{\frac{9}{2}}{3}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=r$$

Donc la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I

c) Montrer que la droite (AB) est tangente à la sphère (S) au point $C(0;1;\frac{1}{2})$

Rappel :

Position relative d'une sphère et une droite

Soit (S) une sphère de centre Ω et d rayon R *et* (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{U}(\alpha;\beta;\gamma)$

Pour déterminer les cordonnées des points d'intersections de (S) et (Δ), on résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}(\Delta):\begin{cases}x=x_A+\alpha t\\ y=y_A+\beta t\\ z=z_A+\gamma t\end{cases}\ ;\ (t\in IR)\\ (S):(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2\end{cases}$$

$(x;y;z)$ les coordonnées de C vérifie le

$$\text{système}\begin{cases}(AB):\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-t\end{cases};(t\in\mathbb{R})\\ (x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$$\text{Donc}(1+2t-1)^2+(2+2t-\frac{1}{2})^2+(-t)^2=\frac{9}{4}$$

$$\text{Donc}(2t)^2+(\frac{3}{2}+2t)^2+(-t-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$$

$$Donc\ 4t^2+\frac{9}{4}+6t+4t^2+t^2+t^2+3t+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$$

$$Donc\ 9t^2+9t+\frac{9}{4}=0$$

$$Donc\ t^2+t+\frac{1}{4}=0$$

$$Donc\ (t+\frac{1}{2})^2=0$$

$$Donc\ t+\frac{1}{2}=0$$

$$Donc\ t=-\frac{1}{2}$$

Donc la droite (AB) est tangente à la sphère (S) en un point C

On remplace $t=-\frac{1}{2}$ dans $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-t\end{cases}$;pour trouver C

$$\text{Donc}\begin{cases}x=1-1\\ y=2-1\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}\ ;\ \text{donc } C(0;1;\tfrac{1}{2})$$

3) **Soit (Q) le plan parallèle à (P) et tangente à (S) en un point J**

a) **Montrer que les points I ; Ω et J sont alignés**

On a la sphère (S) est tangente au plan (P) en un point I

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\Omega I}$ son colinéaires

Et on a le plan (Q) est parallèle à (P) et tangente à (S) en un point J

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ son colinéaires

D'où les vecteurs $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

Donc les points I ; Ω et J sont alignés

b) **En déduire que $\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega J} = -\frac{9}{4}$**

1ère méthode :

On a les vecteurs $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

De sens opposés donc $\left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega J}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$

$cos\left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega J}\right) = -1$

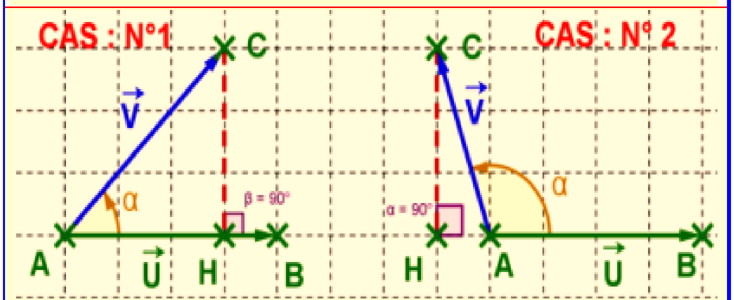
Donc $\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega J} = \Omega I \times \Omega J \times cos\left(\overrightarrow{\Omega I};\overrightarrow{\Omega J}\right)$

$$= -\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

Car $\Omega I = \Omega J = r = \frac{3}{2}$

2ère méthode :

Rappel :



Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH$

Si $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ ont un sens opposé alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

On a les vecteurs $\overrightarrow{\Omega I}$ et $\overrightarrow{\Omega J}$ sont colinéaires

De sens opposés donc :

$$\overrightarrow{\Omega I}.\overrightarrow{\Omega J} = -\Omega I \times \Omega J = -\frac{3}{2}\times\frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

Problème (11 points) :

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1-(x^2+1)e^{-x}$.

1) **Montrer que $g'(x) = (x-1)^2e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$**

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est produit de deux fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 0 - [(2x \times e^{-x}) - (x^2+1)e^{-x}]$$
$$= (x^2 - 2x + 1)e^{-x}$$
$$= (x-1)^2e^{-x}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R} :\ (x-1)^2 \geq 0\ \ et\ \ e^{-x} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}: g'(x) > 0$

Donc d est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) **Vérifier que : $g(0) = 0$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$.**

On a $g(0) = 1-(0+1)e^{0} = 0$

- Sur l'intervalle $[0,+\infty[$

On a g est str croissante sur $[0,+\infty[$ donc

$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$

$\Leftrightarrow g(x) \geq 0$

- Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$

On a g est str croissante sur $]-\infty; 0]$ donc

$x \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$

Conclusion : (le tableau de signe de g)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g(x)		$-$	0	$+$	

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + (x^2+2x+3)e^{-x}$.

1) **a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{(x^2+2x+3)}{e^{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{3}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{2}{\frac{e^x}{x}} + \frac{3}{e^x} = +\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x} = 0$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{2}{\frac{e^x}{x}} + \frac{3}{e^x} - (x-1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} + \frac{2}{\frac{e^x}{x}} + \frac{3}{e^x}$$
$$= 0$$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

c) Montrer que la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - y = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x} - x + 1$$
$$= (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$
$$= (x^2 + 2x + 1 + 2)e^{-x}$$
$$= ((x+1)^2 + 2)e^{-x}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R} : e^{-x} > 0$ et $((x+1)^2 + 2) > 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) - y > 0$

Tu peux étudier le signe de $x^2 + 2x + 3$ en utilisant le discriminant delta

Donc la courbe (C) est au-dessus de droite (D) sur $\mathbb{R}$

2) a) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2+2x+3 + xe^x - e^x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x} + x - 1$$
$$= \frac{(x^2 + 2x + 3)}{e^x} + \frac{xe^x}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x} = +\infty$$

Car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$; $\lim_{x\to-\infty} xe^x - e^x = 0$

Et $\lim_{x\to-\infty} x^2 + 2x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+2x+3 + xe^x - e^x}{e^x}}{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{xe^x} = -\infty$$

Car $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$; $\lim_{x\to-\infty} xe^x - e^x = 0$

Et $\lim_{x\to-\infty} x^2 + 2x + 3 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une produit et somme des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = [x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}]'$$
$$= 1 + (2x + 2) \times e^{-x} - (x^2 + 2x + 3) \times e^{-x}$$
$$= 1 - (x^2 + 2x + 3 - 2x - 2)e^{-x}$$
$$= 1 - (x^2 + 1)e^{-x} = g(x)$$

b) En déduire que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

On a $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Donc le signe de f' est celui de g

D'après la partie A) on a

(le tableau de signe de g)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g(x)		−	0	+	

D'où la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

4) Soient h la fonction définie $\mathbb{R}$ sur $h(x) = f(x) - x$ et la droite $(\Delta) : y = x$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2;3[$

(On prend $f(2) \simeq 2.4$ et $f(3) \simeq 2.8$)

La fonction h est dérivable sur $[2;3]$ car c'est une somme des fonctions dérivable sur$[2;3]$ donc elle est continue sur $[2;3]$

Soit $x \in [2;3]$

$h'(x) = f'(x) - 1$
$= g(x) - 1$
$= -(x-1)^2 e^{-x}$

$\forall x \in [2;3]: h'(x) < 0$

Donc h est str décroissante sur $[2;3]$

$h(2) \simeq f(2) - 2 \simeq 2.4 - 2 \simeq 0,4$

$h(3) \simeq f(3) - 3 \simeq 2.8 - 3 \simeq 0,2$

Donc $h(2) \times h(3) < 0$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2;3[$

b) Montrer que (C) est au-dessus de (Δ) sur intervalle$]-\infty;\alpha]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$

On a $h(\alpha) = 0$

- Sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$

h est str décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$ donc

$x \geq \alpha \Leftrightarrow h(x) \leq g(\alpha)$
$\Leftrightarrow h(x) \leq 0$
$\Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$

Donc (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$

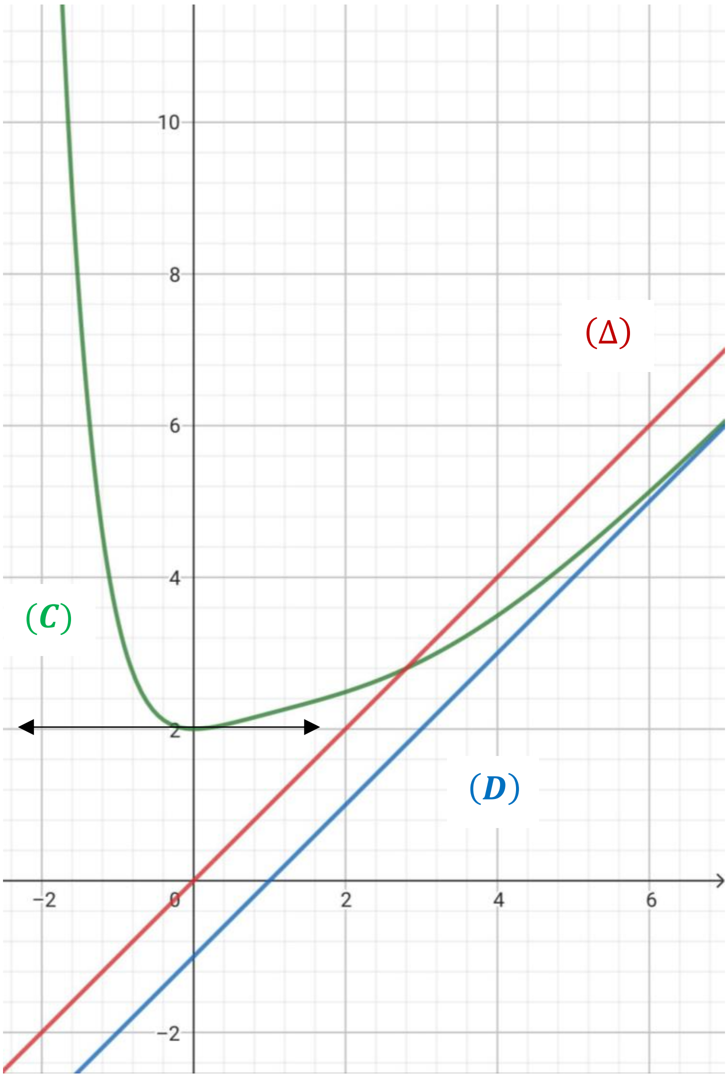
- Sur l'intervalle $]-\infty;\alpha]$

On a h est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;\alpha]$ donc

$x \leq \alpha \Leftrightarrow h(x) \geq h(\alpha)$
$\Leftrightarrow h(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$

Donc (C) est au-dessus de (Δ) sur intervalle$]-\infty;\alpha]$

5) Construire (D); (Δ) et (C) dans le même repère $(0;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.



6)a) Monter que la fonction $K: x \to (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de
la fonction $k: x \to -x^2e^{-x}$ sur $[0,1]$

La fonction K est dérivable sur $[0,1]$ car c'est un produit de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$

Soit $x \in [0,1]$

$H'(x) = [(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]'$
$= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$
$= -x^2e^{-x}$
$= k(x)$

Donc $K: x \to (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de $k: x \to -x^2e^{-x}$

b) Déduire que : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \frac{2e-5}{e}$

On a H: $x \to (x^2+2x+2)e^{-x}$ est une primitive de h: $x \to -x^2e^{-x}$ donc

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -[(x^2+2x+2)e^{-x}]_0^1$$
$$= -5e^{-1} + 2$$
$$= \frac{2e-5}{e}$$

c) Par intégration par parties , montrer que $\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$

Posons $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Il s'ensuit donc :

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$$
$$= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1$$
$$= -e^{-1} - e^{-1} + 1$$
$$= -2e^{-1} + 1$$
$$= \frac{e-2}{e}$$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On a d'après la partie II) 1) la courbe (C) est en dessus de la droite (D); $y = x - 1$ sur l'intervalle $[0,1]$

Donc $\forall x \in [0,1]$: $|f(x) - y| = f(x) - y$

$$A = \int_0^1 |f(x) - y| dx \times u.a$$
$$= \int_0^1 f(x) - y \, dx \times u.a$$
$$= \int_0^1 (x^2 + 2x + 3)e^{-x} dx \,.\, cm^2$$
$$= 2\int_0^1 xe^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + 3\int_0^1 e^{-x} dx$$
$$= \left(\frac{2(e-2)}{e} + \frac{2e-5}{e} - 3[e^{-x}]_0^1\right) cm^2$$
$$= \left(\frac{2e-4}{e} + \frac{2e-5}{e} - \frac{3}{e} + 3\right) cm^2$$
$$= \left(\frac{7e-12}{e}\right) cm^2$$

III) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) Montrer que $2 \le u_n \le \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour n=0 on a $u_0 = 2$ donc $2 \le u_0 \le \alpha$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$

- Soit n un entier naturel,

Supposons que $2 \le u_n \le \alpha$ et montrons que $2 \le u_{n+1} \le \alpha$.

On sait que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]2;\alpha[$

et $2 \le u_n \le \alpha$

$$2 \le u_n \le \alpha \Rightarrow f(2) \le f(u_n) \le f(\alpha)$$
$$\Rightarrow 2 \le u_{n+1} \le \alpha$$

Car $f(2) \simeq 2.4 > 2$

D'après le principe de récurrence, on a :

$(\forall n \in \mathbb{N})$: $2 \le u_n \le \alpha$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante (On pourra utiliser le résultat de la question II) 4. b))

Soit n un entier naturel,

On a: $(\forall x \in [2;\alpha])$: $f(x) - x \ge 0$

D'après 4)b)

et $u_n \in [2;\alpha]$ d'après III) 1)

Donc on pose $x = u_n$,

On trouve $f(u_n) - u_n \ge 0$

Donc : $u_{n+1} \ge u_n$;

D'où la suite (u_n) est croissante

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

La suite (u_n) est croissante et majorée par α donc elle est convergente.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $[2;\alpha]$; car elle est dérivable sur $[2;\alpha]$
- $f([2;\alpha]) = [f(2);f(\alpha)] \subset [2;\alpha]$
  Car $f(2) \simeq 2.4 > 2$ et $f(\alpha) = \alpha$
- $u_0 \in [2;\alpha]$
- La suite (u_n) est convergente

Alors la limite de la suite (u_n) est L la solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[2;\alpha]$

$$f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = \alpha$$

Donc la limite de la suite (u_n) est α