Dérivabilité

EL KYAL MOHAMED

Fonction dérivable en un point:

On dit qu'une fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

L'équation de la tangente à une courbe :

Soit f fonction est dérivable en x_0

L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0

est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Dérivabilité à droite, à gauche en un point :

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0, si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0, on le note $f'_d(x_0)$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0, si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

  Cette limite est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0, on le note $f'_g(x_0)$

f dérivable en x_0, si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Dérivabilité et continuité :

Si f une fonction est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Dérivée des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	

- ***Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée :***

$(u+v)' = u' + v'$	$(ku)' = k(u)' \quad (k \in \mathbb{R})$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(uov)' = [u'ov] \times v'$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- ***Dérivée et sens de variation :***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **croissante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- f est **décroissante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
- f est **constante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I \quad f'(x) = 0$

- ***Interprétation géométrique et dérivabilité :***

La limite	Dérivabilité en x_0	Interprétation géométrique : (C_f) admet
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underset{(a \neq 0)}{a}$	f est dérivable en x_0	Une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une tangente horizontale au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underset{(a \neq 0)}{a}$	f est dérivable à droite en x_0	Une demi- tangente à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi- tangente horizontale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à droite en x_0	Une demi- tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underset{(a \neq 0)}{a}$	f est dérivable à gauche en x_0	Une demi- tangente à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ de coefficient directeur a
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		Une demi-tangente horizontale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en x_0	Une demi- tangente verticale à gauche au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le haut
$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		Une demi- tangente verticale à droite au point $A(x_0; f(x_0))$ dirigée vers le bas

Fiche *methodes* : *Etude de* fonctions

1. Asymptotes

Asymptote verticale

La droite $x = a$ est dite **asymptote verticale** (A. V.) de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty) \qquad\qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty)$$

Une A. V. ne peut exister que si la fonction f n'est pas définie en $x = a$.

Asymptote affine

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **asymptote affine** (A. A.) de la courbe représentative de la fonction f si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + h)] = 0 \qquad (\text{propriété analogue en } -\infty)$$

Les valeurs de m et h sont calculées avec les formules suivantes :

Remarque
Si $m = 0$, l'asymptote est horizontale.

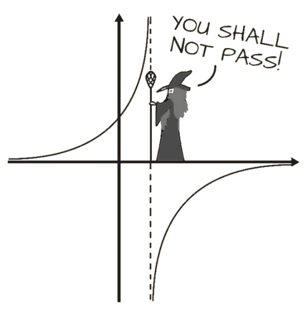
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad h = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \qquad (\text{idem en } -\infty)$$

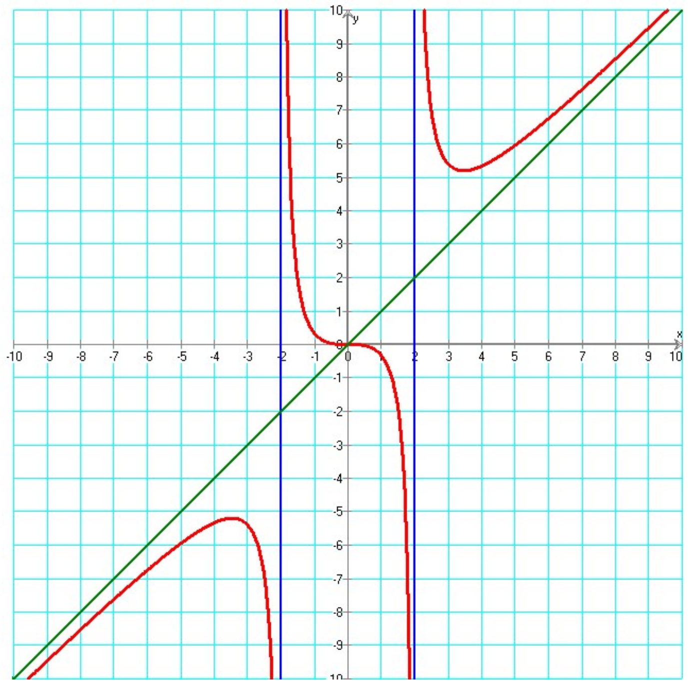
Remarque : Si m tend vers l'infini, alors il n'y a pas d'asymptote affine. Inutile donc d'essayer de calculer h.

Attention ! L'asymptote affine n'est pas forcément la même en $+\infty$ et en $-\infty$. Il faut donc étudier les deux cas.

C'est en particulier le cas avec des fonctions exponentielles ou la fonction arctan(x).

Ci-dessous, le graphe de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$, qui possède deux asymptotes verticales (en bleu) et une asymptote affine (en vert).





Remarquez que la fonction n'est pas définie en $x = -2$ et $x = 2$.

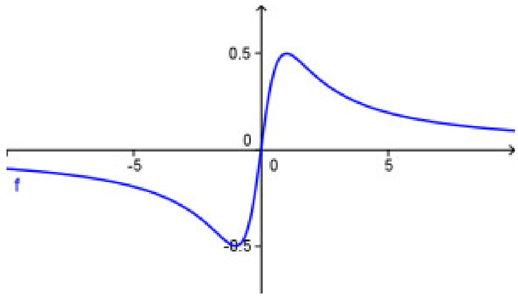
Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

Cinq exemples un peu particuliers

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

une asymptote horizontale : $y=0$

la courbe coupe l'asymptote.

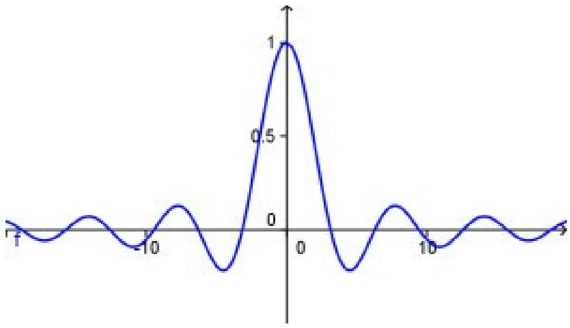


$f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$

une asymptote horizontale : $y=0$

elle est coupée une infinité de fois par la fonction.

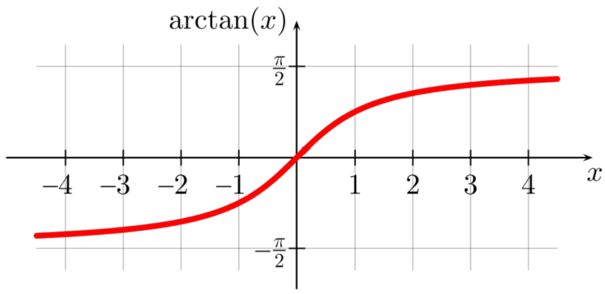
il y a un trou en $x=0$.



$f(x)=\arctan(x)$

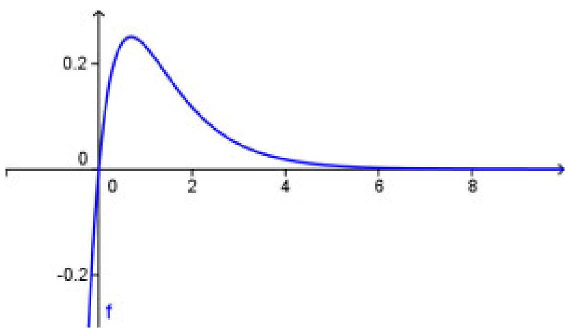
vers $+\infty$, une asymptote horizontale : $y=\dfrac{\pi}{2}$

vers $-\infty$, une autre asymptote horizontale : $y=-\dfrac{\pi}{2}$



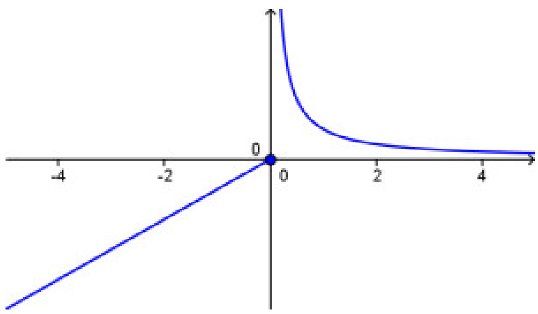
$f(x)=-\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{-x}$

une asymptote horizontale vers $+\infty$, mais pas d'asymptote vers $-\infty$.



$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

une asymptote verticale en $x=0$. Pourtant la fonction est définie en $x=0$...



2. Méthode

L'étude d'une fonction f comprend huit étapes. Vous trouverez au § 5.3 un exemple qui vous servira d'aide-mémoire.

1. Ensemble de définition

Déterminer le domaine D où la fonction $f(x)$ est définie.

2. Parité

Voir si la fonction est paire, impaire, périodique ou rien du tout. Cela permet, si la fonction est « agréable », de gagner du temps par la suite.
La fonction f est paire si $f(x) = f(-x)$, et impaire si $f(x) = -f(-x)$, $\forall x$.

3. Signe de la fonction

Chercher les zéros, puis faire un tableau pour voir où la fonction est négative, positive ou nulle.

4. Asymptotes verticales, trous

Calculer la ou les asymptotes verticales et trouver les éventuels trous.

5. Asymptotes affines

Calculer la ou les asymptotes affines et, si demandé, trouver le positionnement de la courbe par rapport à ces asymptotes.

6. Croissance et points critiques

Un point c de l'ensemble de définition est un **point critique** si $f'(c) = 0$ ou si $f'(c)$ n'existe pas.

Calculer la dérivée et chercher ses zéros. Faire un tableau pour voir comment la fonction croît. Identifier les minima, les maxima et les points d'inflexion à tangente horizontale.

7. Concavité et points d'inflexion

Chercher la concavité de la fonction et les points d'inflexion. Pour cela, calculer la dérivée seconde si elle n'est pas trop compliquée (cette méthode est la seule qui garantit de trouver tous les points d'inflexion). Faire un tableau. Calculer les pentes des tangentes aux points d'inflexion.

8. Représentation graphique

Dessiner la courbe en utilisant les renseignements glanés aux étapes 1 à 7.
Faire un grand dessin où l'on représente le graphe de la fonction, les asymptotes et les points particuliers.

3. Un exemple complet

Étudions la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Ensemble de définition

L'ensemble de définition de f est $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Parité

Si la fonction est paire ou impaire, on peut alors n'étudier que le côté positif. Le côté négatif se déduira du côté positif.

f est paire si $f(x) = f(-x)$. Est-ce le cas ?

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=\frac{-x^3}{(x+1)^2}\neq f(x)\ .$$

f n'est donc **pas paire**.

f est impaire si $f(x) = -f(-x)$. Est-ce le cas ?

$$-f(-x)=-\frac{(-x)^3}{(x+1)^2}=\frac{x^3}{(x+1)^2}\neq f(x)\ .$$

f n'est donc **pas impaire**.

En fait, puisque le domaine de définition D n'est pas symétrique, il est évident que la fonction ne peut être ni paire, ni impaire.

3. Signe de la fonction

Cherchons d'abord le(s) zéro(s) de f :

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0 .$$

Le signe de la fonction est donné par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 3) :

x	<0	0	] 0 ; 1 [	1	>1
x^3	–	0	+		+
$(x-1)^2$	+	+	+		+
$f(x)$	–	0	+		+

4. Asymptotes verticales (A.V.), trous

On peut s'aider du tableau de signes de l'étape 3 pour déterminer le signe de l'infini.

Par exemple, on a vu que $\frac{\sin(x)}{x}$ a un trou en $x = 0$.

Les asymptotes verticales, s'il y en a, se trouvent aux abscisses trouvées à l'étape 1. Il s'agit de vérifier que ce sont bien des asymptotes verticales et non pas des trous.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$$

Si on avait un trou, on trouverait que la limite à gauche est égale à la limite à droite et que ces limites seraient égales à un **nombre**.

5. Asymptotes affines (A.A.)

Une asymptote affine est de la forme $y = m{\cdot}x + h$. On va analyser ce qui se passe en $-\infty$ et en $+\infty$.

Du côté de $+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$h=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

Du côté de $+\infty$, l' A.A. est donc $y = x + 2$.

Du côté de $-\infty$

Idem que pour $+\infty$ (le signe ne change rien).

6. Croissance et points critiques

$f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ s'annule en 0 et 3.

Les points du graphe dont les abscisses sont des points critiques de f sont donc (0 ; 0) et (3 ; $\frac{27}{4}$).

La croissance de f est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 6) :

x		0		1		3	
$f'(x)$	+	0	+		–	0	+
$f(x)$	↗	0	↗		↘	$\frac{27}{4}$	↗
		pt. d'infl. à tg. hor.				minimum	

Fiche *methodes* :*Etude de* fonctions

7. Concavité et points d'inflexion

$f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$ s'annule en 0.

La concavité de f est donnée par le tableau suivant (dans la première ligne, on met les valeurs de x trouvées aux étapes 1 et 7) :

x		0		1	
$f''(x)$	–	0	+		+
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$		$\cup$

pt. d'infl.

Calcul de la pente de la tangente au point d'inflexion

Il y a un seul point d'inflexion en (0 ; 0).

$$m=f'(0)=\frac{0^2(0-3)}{(0-1)^3}=\frac{0}{1}=0$$

(on savait déjà d'après l'étape 6 que c'était un point d'inflexion à tangente horizontale).

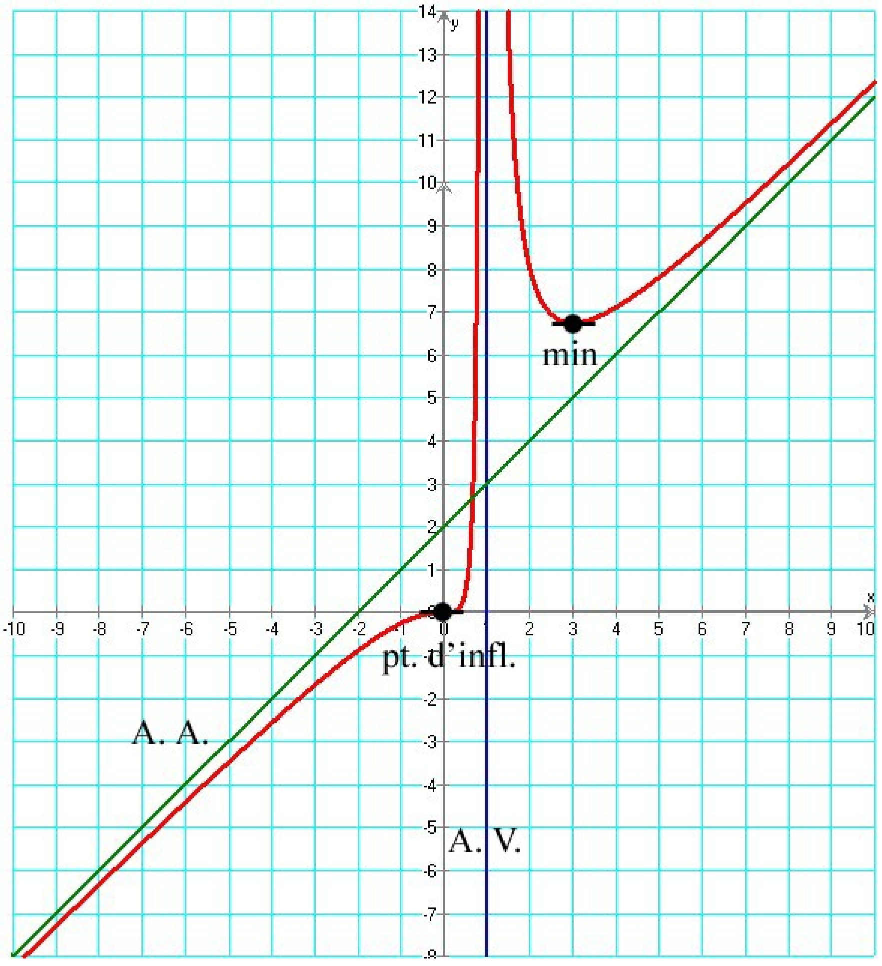
8. Représentation graphique

On trace d'abord les asymptotes trouvées aux étapes 4 et 5.

On place ensuite tous les points que l'on a trouvés aux étapes 3, 6 et 7.

On trace enfin la courbe d'après les indices récoltés aux étapes 2, 3, 6 et 7. Les tableaux en particulier sont d'une aide très précieuse.

Il est conseillé de calculer d'autres points de la fonction et de les reporter sur le dessin.



Remarque
Plutôt que de faire ce graphique à la fin de l'étude, on peut aussi le dessiner au fur et à mesure des étapes.

Exercice1

Étudiez les fonctions suivantes selon l'exemple du § 5.3. Vous trouverez des corrigés sur le site de ce cours.

Fonctions rationnelles

1. $f(x)=\dfrac{-3x+4}{2x+3}$

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ aide : $f''(x)=\dfrac{-8(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}$

3. $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$ aide : $f''(x)=\dfrac{6(4-x)}{(x-2)^4}$

4. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-1}$

Autres types de fonctions

5. a. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ **5. b.** $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

6. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

7. $f(x)=(2x^2+2x-1)\cdot\mathrm{e}^{-2x}$

8. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2)+1}{2x}$

9. $f(x)=(\mathrm{e}^x-5)(\mathrm{e}^x+1)$

Exercice 2

En photographie, la *profondeur de champ* correspond à la zone de l'espace dans laquelle doit se trouver le sujet à photographier pour en obtenir une image que l'œil considérera nette.

En optique, pour que la netteté s'étende de la distance a à la distance r, la mise au point doit être faite à la distance $p=\dfrac{2ar}{a+r}$ (les distances sont exprimées en mètres).

a. À quelle distance doit être faite la mise au point pour photographier un sujet dont les éléments intéressants sont à une distance comprise entre 1.5 m et 3 m ?

On souhaite désormais que les sujets soient nets à partir d'une distance de 5 m.

b. Démontrez que pour $a > 5$, $p=10-\dfrac{50}{5+r}$.

c. Étudiez la fonction p du point **b** et dessinez son graphe.

d. On souhaite que la netteté s'étende de « 5 m à l'infini ». Quelle distance de mise au point doit-on choisir ?

5.4. Ce qu'il faut absolument savoir

Trouver les asymptotes d'une fonction ❏ ok

Connaître et maîtriser les huit étapes de la méthode par cœur ❏ ok

Définition :

Soit n un entier naturel non nul

La fonction : $x \mapsto x^n$ est continue et strictement monotone sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$

elle admet une fonction réciproque définie sur $\left[0;+\infty\right[$,nommée racine n-ième

et que l'on note $\sqrt[n]{\ }$ et on a : $\forall \left(x;y\right) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

Propriétés:

$\forall \left(x;y\right) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- $\sqrt[n]{x^n} = x$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x > y$

$\forall \left(x;y\right) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \forall \left(m;n\right) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$

- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} \qquad \left(y \neq 0\right)$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\times m]{x}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n\times m]{x^m}$

Ensemble de définition :

L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u\left(x\right)}$ est :

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \in D_u \text{et } u\left(x\right) \geq 0\right\}$

Limites:

$\lim\limits_{x\to x_0} u\left(x\right)$
$\ell \geq 0$
$+\infty$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{u\left(x\right)}$
$\sqrt[n]{\ell}$
$+\infty$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0 , à gauche en x_0 , en $+\infty$ et en $-\infty$

Continuité :

Si f une fonction définie ,positive et continue sur un intervalle I

alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u\left(x\right)}$ est continue sur I

- **Dérivée :**

Si u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I

alors la fonction : $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \qquad \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{\left[u(x)\right]^{n-1}}}$

- **Résolution de l'équation** $x \in \mathbb{R} \qquad x^n = a \qquad (a \in \mathbb{R})$ **:**

	n un entier naturel impair	n un entier naturel pair non nul
$a > 0$	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\right\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \left\{-\sqrt[n]{\lvert a\rvert}\right\}$	$S = \varnothing$

- **Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif:**

Soit un x réel strictement positif et un r nombre rationnel

On pose $r = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

On a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

- **Remarques :**

  - $\sqrt[n]{u(x)} = \left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}$
  - $\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \left(\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \dfrac{1}{n} \times \left(u(x)\right)' \times \left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}$

Pour tous réels x et y positifs et pour tous rationnelles r et r'

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\left(x^r\right)^{r'} = x^{r \times r'}$
- $(x \times y)^r = x^r \times y^r$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$
- $\dfrac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

Fonction réciproque

EL KYAL MOHAMED

- **Propriété :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors f admet **une fonction réciproque,** notée f^{-1},définie sur l'intervalle $f(I)$

et on a : $$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

- **Détermination de l'expression de $f^{-1}(x)$:**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I tel que: $f^{-1}(x) = y$

On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et en résolvant l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y

On déduit l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

- **Continuité de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors une fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$

- **Dérivabilité de la fonction réciproque :**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

soit x_0 un élément de I et $y_0 = f(x_0)$

si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0

et on a : $$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I

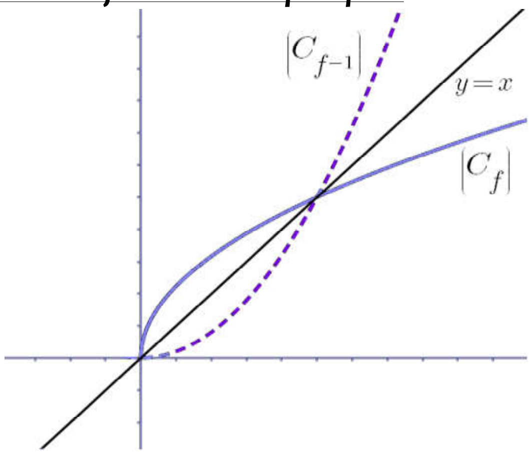
alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in f(I) \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

Monotonie de la fonction réciproque :

> Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
>
> Alors une fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$
>
> et varie dans le même sens que f

La courbe représentative de la fonction réciproque :



> Dans un repère orthonormé $\left(C_{f^{-1}}\right)$ est le symétrique de $\left(C_f\right)$ par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation: $y = x$)

Remarques:

La courbe $\left(C_f\right)$	$\Rightarrow$	La courbe $\left(C_{f^{-1}}\right)$
$A(a,b) \in \left(C_f\right)$		$A'(b,a) \in \left(C_{f^{-1}}\right)$
admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$		admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$
admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (on détermine l'expression de y à partir de la relation: $x = ay + b$)
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale		admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale		admet une tangente (ou demi-tangente) verticale

Branches infinies

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ → $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(ax+b)=0$ → (D):y = ax+b est une asymptote à (C) en $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=a$ → (C) Admet une asymptote horizontale d'équation y = a Au voisinage de $\pm\infty$

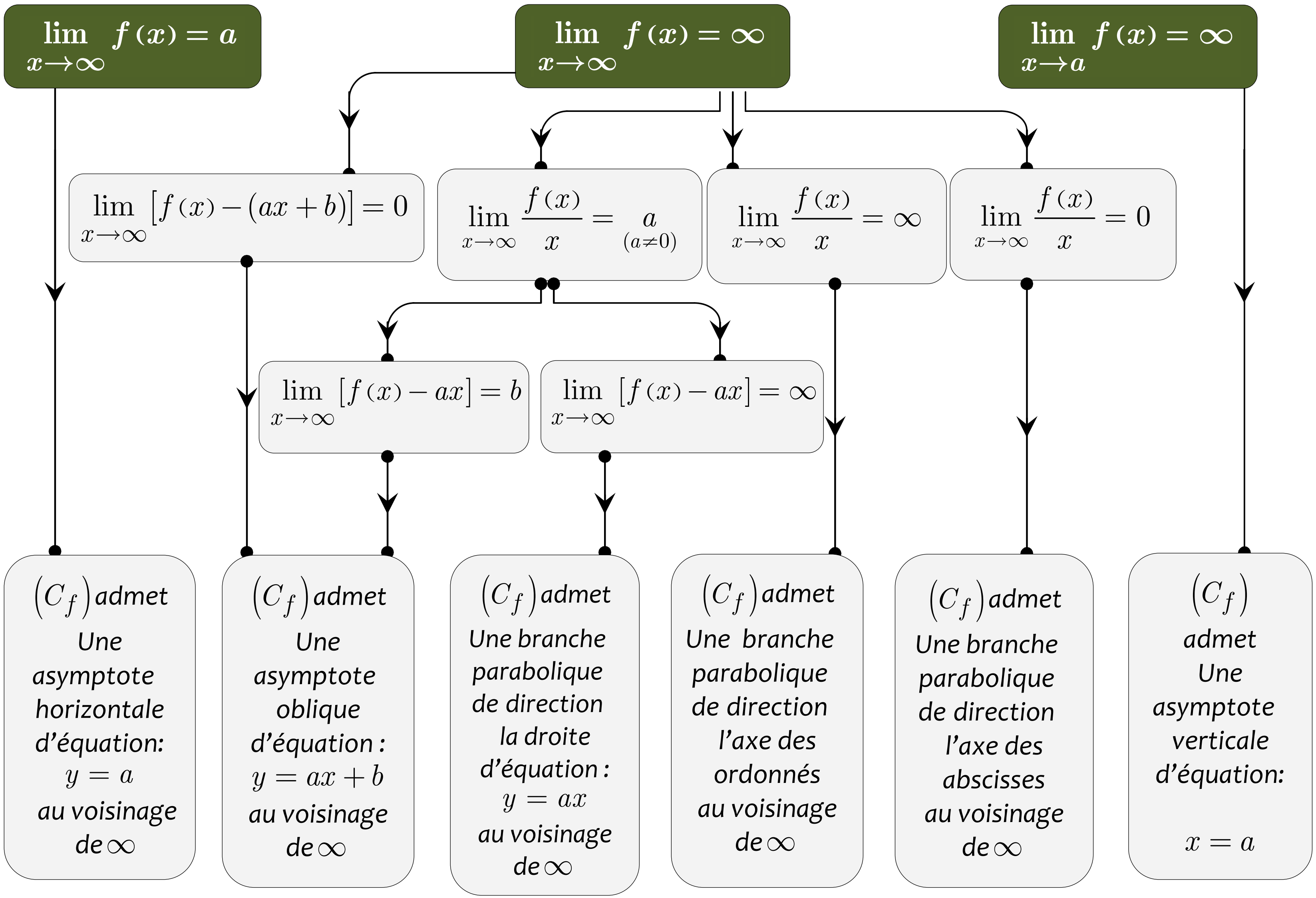
$\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$ → (C) Admet une asymptote verticale d'équation x = a

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a; a\neq 0$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=b$ → (C) Admet une asymptote d'équation y = ax + b Au voisinage de $\pm\infty$
  - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ → (C) Admet une branche parabolique de direction la droite (D):y = ax Au voisinage de $\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ → (C) Admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées Au voisinage de $\pm\infty$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ → (C) Admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses Au voisinage de $\pm\infty$

AHMED AGOUZAL

Branches infinies



Axe de symétrie-Centre de symétrie-Point d'inflexion

EL KYAL MOHAMED

➢ Axe de symétrie – Point de symétrie :

La droite d'équation $x=a$ est **un axe de symétrie** de la courbe $\left(C_f\right)$ si :

- $\forall x \in D_f \qquad \left(2a-x\right) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \qquad f\left(2a-x\right) = f\left(x\right)$

Le point $I\left(a,b\right)$ est **un point de symétrie** de la courbe $\left(C_f\right)$ si :

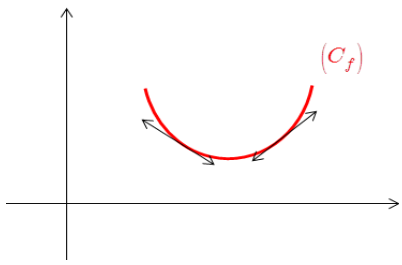
- $\forall x \in D_f \qquad \left(2a-x\right) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \qquad f\left(2a-x\right) + f\left(x\right) = 2b$

➢ Concavité et point d'inflexion d'une courbe :

*Une fonction est **convexe** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes*

Si $\forall x \in I \qquad f''\left(x\right) \geq 0$

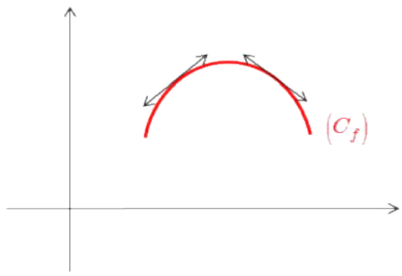
alors la courbe $\left(C_f\right)$ *est convexe sur l'intervalle* I



*Une fonction est **concave** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes*

Si $\forall x \in I \qquad f''\left(x\right) \leq 0$

alors la courbe $\left(C_f\right)$ *est concave sur l'intervalle* I



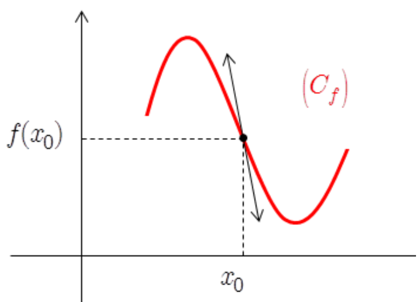
Un **point d'inflexion** d'une courbe $\left(C_f\right)$ est le point ou la courbe $\left(C_f\right)$ change de concavité en ce point

Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0

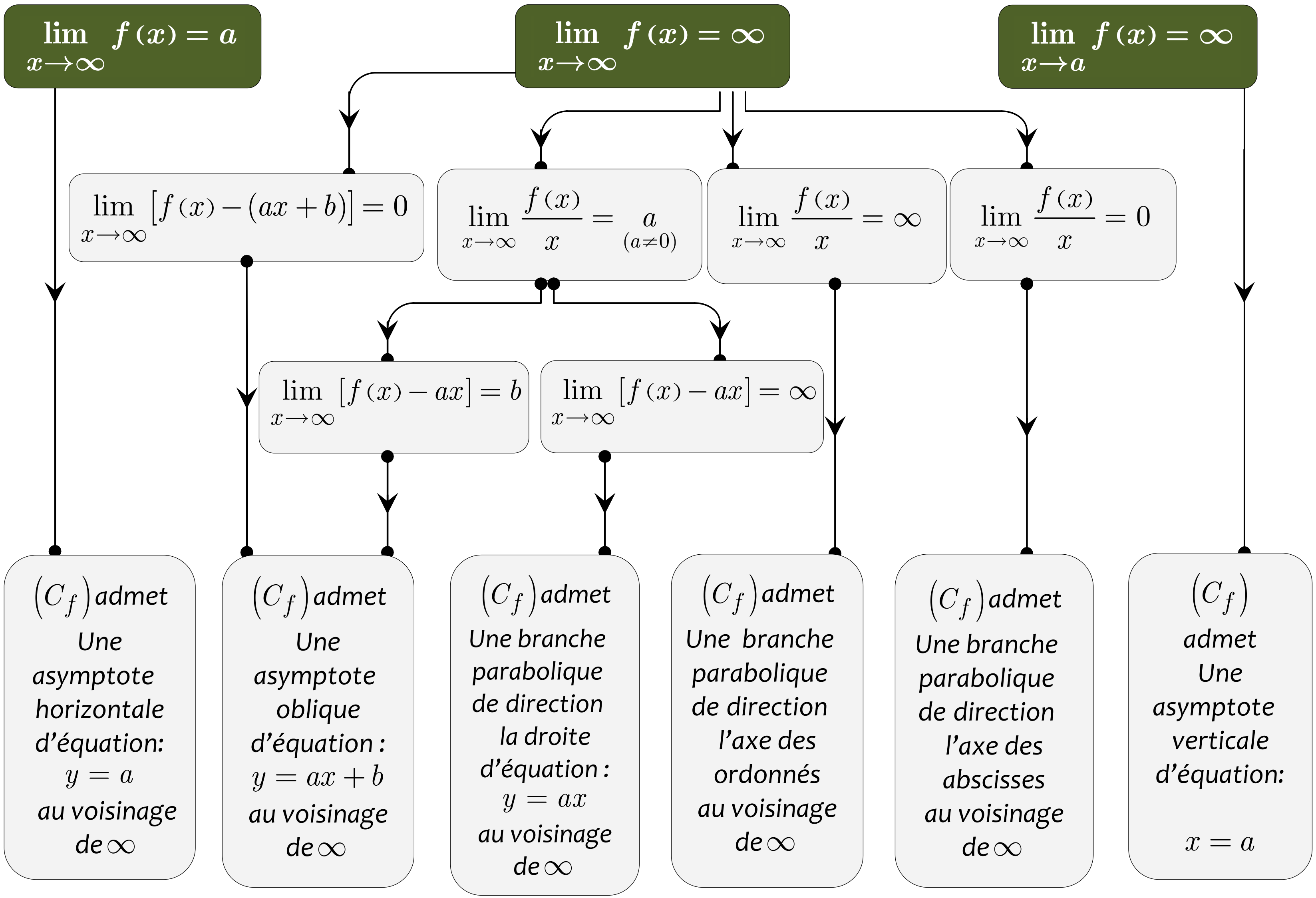
alors la courbe $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Si f' s'annule sans changer de signe en x_0

alors la courbe $\left(C_f\right)$ admet un point d'inflexion d'abscisse x_0



Branches infinies



Signe du binôme $ax+b\ ;\ (a\neq 0)$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

Signe et factorisation du pôlynome $ax^2+bx+c\ ;\ (a\neq 0)$:

Discriminant		Solution de l'équation : $P(x)=0$ $x\in\mathbb{R}$	Signe de $P(x)$	Factorisation de $P(x)$
$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta\prec 0$	$S=\varnothing$	x: $-\infty$ … $+\infty$; $P(x)$: Signe de a	Impossible à l'aide De deux polynômes
	$\Delta=0$	$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	x: $-\infty$, $-\frac{b}{a}$, $+\infty$; $P(x)$: Signe de a, 0, Signe de a	$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)$
	$\Delta\succ 0$	$S=\{x_1;x_2\}$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	x: $-\infty$, x_1, x_2, $+\infty$; $P(x)$: Signe de a, 0, Signe de $-$a, 0, Signe de a (Supposons que $x_1\prec x_2$)	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation : $ax^2+bx+c=0\ ;\ x\in\mathbb{R}$ et $(a\neq 0)$

Alors on a : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

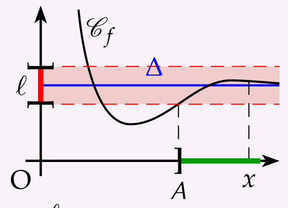
Comportement d'une fonction

Il s'agit déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction.

Comportement d'une fonction en l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

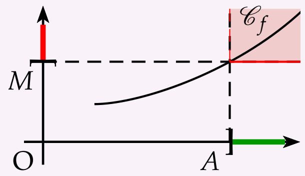
Tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A\,;+\infty[$.



On a une asymptote horizontale $y = \ell$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Tout intervalle $]M\;;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand i.e. pour $x \in]A\,;+\infty[$.



Opérations sur les limites

On peut calculer les limites par somme, produit et quotient sauf dans les 4 cas suivants.

$+\infty - \infty$ **:** On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'un produit.

$0 \times \infty$ **:** On essaiera de mettre la fonction sous la forme d'une somme.

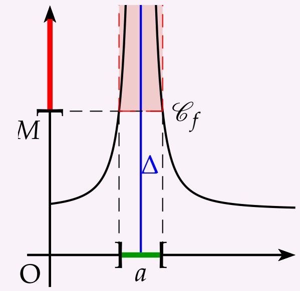
$\dfrac{0}{0}$ **:** On simplifiera la fonction dans le cas d'une fonction rationnelle.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ **:** On mettra en facteur le terme prépondérant du numérateur et du dénominateur.

Comportement d'une fonction en un point où la fonction n'est pas définie

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

tout intervalle $]M\;;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a i.e $|x-a| < \varepsilon$.



On a une asymptote verticale $x = a$

Remarque : Lorsque la limite en a n'existe pas mais que l'on peut définir une limite de chaque côté de a, on parle de limite à droite et de limite à gauche.

Limites en l'infini des fonctions élémentaires

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	0	non défini	non défini

Limites en zéro des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	non défini

Théorème de comparaison

f, g, et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I,\; f(x) \geqslant g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I,\; f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Limites et calculatrice

La notion de limite a mis du temps pour avoir un statut rigoureux en mathématique (deux siècles). C'est pour cela que sa définition n'est pas très « instinctive ».
Derrière la notion de limite se cache des nombres que l'on qualifiait avant « d'infiniment petit » ou « d'infiniment grand ». Une calculatrice ne connaît pas de tels nombres. On peut mettre en défaut une calculatrice sur un calcul de limite lorsque sa capacité d'appréhender un nombre très petit ou très grand est dépassée.

Théorème des gendarmes

f, g, et h sont trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a (réel, $+\infty$ ou $-\infty$)

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in I,\; g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$$

Quelques calculs de limites

- $f_1(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$ on a :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+3 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par somme}\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty\end{array}$$

- $f_2(x) = x^2 + x = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en $-\infty$ on factorise par le terme prépondérant

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par produit}\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty\end{array}$$

- $f_3(x) = \dfrac{2x-1}{x+2} \overset{\div x}{=} \dfrac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$ en $+\infty$ on divise par le terme prépondérant

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{2}{x} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par quotient}\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = 2\end{array}$$

La courbe $\mathscr{C}_{f_3}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$.

- $f_4(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x}$ en 1 on étudie la limite de chaque côte de la valeur interdite.

On fait un tableau de signes pour $(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to1} x^2-4 = -3 \\ \displaystyle\lim_{x\to1^+} 1-x = 0^- \\ \displaystyle\lim_{x\to1^-} 1-x = 0^+\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par quotient}\\ \displaystyle\lim_{x\to1^+} f_4(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to1^-} f_4(x) = -\infty\end{array}$$

La courbe $\mathscr{C}_{f_4}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Étude d'une fonction rationnelle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

a) Déterminer la limite de la fonction f en -1. Interprétation géométrique.
b) Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
c) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
d) Étudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation.
e) Que se passe t-il pour la courbe au point $x = 0$?
f) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $x = 2$.

---

a) $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-1} x^3 = -1 \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+} x+1 = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^-} x+1 = 0^-\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient, on a}\\ \displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty\end{array}$$ asymptote verticale d'équation $x = 1$.

b) En l'infini : $f(x) \overset{\div x}{=} \dfrac{x^2}{1+\frac{1}{x}}$ on a $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{1}{x} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient, on a}\\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2(3x+3-x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

d) $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0$ ou $2x+3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

Le signe de $f'(x)$ est du signe de $2x+3$ car $\forall \in D_f,\ x^2 > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

e) Au point 0, la dérivée s'annule mais ne change pas de signe, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc un point d'inflexion en 0.

f) Équation de la tangente (T) au point d'abscisse 2.

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \;\Leftrightarrow\; y = \frac{28}{9}(x-2) + \frac{8}{3} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{28}{9}x - \frac{32}{9}$$