Travail et énergie cinétique (exercices avec correction)

Exercice 1 :

Calculer l'énergie cinétique d'un cylindre de masse $m = 20\ kg$ et de rayon $R = 40\ cm$ dans chacun des cas suivants :

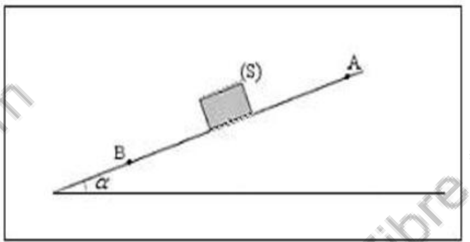
1)- Le cylindre est en translation de vitesse $V = 20\ m.s^{-1}$.

2)- Le cylindre est en rotation autour d'un axe fixe de vitesse angulaire $\omega = 50\ rad.s^{-1}$.

Exercice 2 :

Un corps solide, descend une pente $AB = 10\ m$ en ligne droite, sans frottement, le plan incliné fait angle α avec l'horizontale. Au point A sa vitesse était nulle, à l'arrivée au point B sa vitesse est $V = 8\ km/h$.

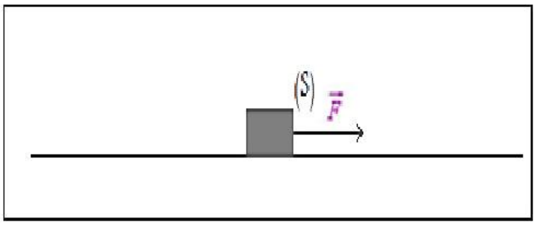
Calculer l'angle α.



Exercice 3 :

Un mobile S de masse $m = 1{,}5.10^3\ kg$ est en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $V = 30\ km.h^{-1}$.

A l'instant $t = 0$ on applique sur le mobile une force $\vec{F}$ dont la direction et le sens du mouvement sa puissance constante est égale $\mathcal{P} = 66\ kW$.



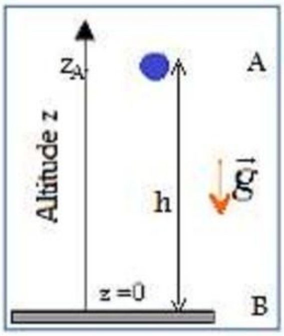
1)- Calculer la valeur de la vitesse V' en $(km.h^{-1})$ à l'instant $t = 10s$.

2)- Déduire la valeur de la force $\vec{F}$ à cet instant.

Exercice 4 :

Une bille est lancée verticalement vers le haut à une altitude $h = 2{,}0m$ par rapport au sol, avec une vitesse $V_A = 10\ m/s$.

On considère que le poids est la seule force appliquée à la bille (chute libre) voir figure.



On donne $g = 10\,N/kg$.

Calculer en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

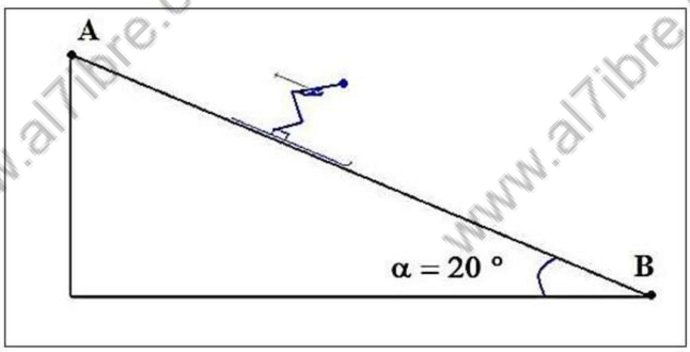
1- La hauteur maximale atteinte par la bille.

2- La vitesse de la bille lorsqu'elle retombe sur le sol.

Exercice 5 :

Un skieur descend une pente en ligne droite sur une distance AB=200m. La pente fait un angle de $\alpha = 20°$ avec l'horizontale.

Au point A sa vitesse était nulle, à l'arrivée au point B sa vitesse est $30\,km/h$. La masse du skieur est $80\ kg$.



L'ensemble des forces de frottements que subit le skieur est équivalent à une force f parallèle au sol mais opposée au sens du mouvement.

1- Représenter le skieur avec les différentes forces qui agissent sur lui et nommer ces forces.

2- Calculer le poids du skieur et déterminer quel angle il fait avec AB.

3- Calculer le travail du poids au cours de mouvement de A à B.

4- Déterminer l'énergie cinétique du skieur à l'arrivée au B.

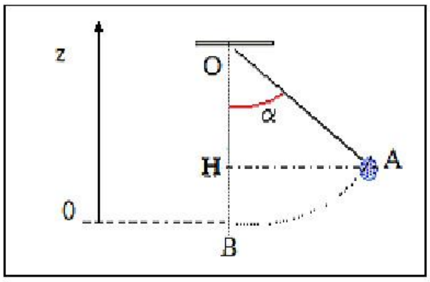
5- Donner l'expression du théorème de l'énergie cinétique appliqué au cas de ce skieur.

6- Donner l'expression du travail de $\vec{f}$.

7- Déterminer l'intensité de la force f.

Exercice 6 :

Une pendule est constituée d'une bille de masse $m = 200g$, suspendue à un fil de longueur $L = 1{,}00m$.



On écarte le fil d'un angle $\alpha = 70°$ par rapport à la verticale (position A) et on l'abandonne sans vitesse initiale. On néglige les frottements.

On donne $g = 10\,N/kg$.

- Calculer la vitesse de la bille à son passage par la position d'équilibre (position B).

Exercice 7 :

Un cylindre homogène de masse $m = g$ et de rayon $R = 10\ cm$, tourne autour de son axe de rotation Δ à la vitesse $\omega = 45\ tours/min$.

On arrête le moteur qui fait tourner le cylindre, le cylindre fait 120 tours avant de s'arrêter. On donne le moment d'inertie du cylindre $J_\Delta = 3.10^{-2}\ kg.m^2$.

1)- Calculer la valeur de moment du couple de frottement qui est considéré constant.

2)- On fait fonctionner le moteur de nouveau, le cylindre tourne à la vitesse constante $\omega = 45\ tours/min$. Calculer le travail effectué par le moteur pendant une minute et déduire sa puissance.

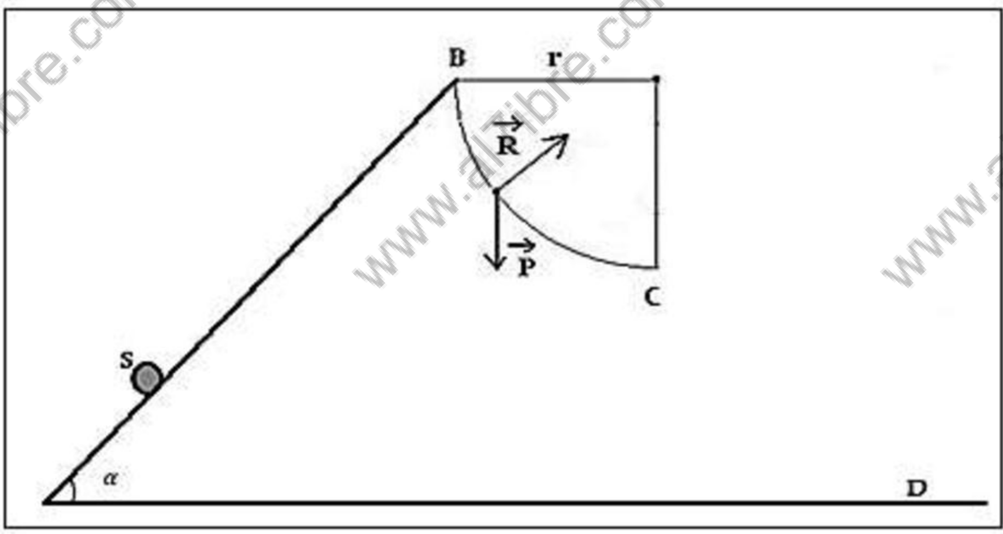
Exercice 8 :

Un solide S assimilable à un point matériel de masse $m = 50g$ est en mouvement sur une piste constituée d'une partie rectiligne AB inclinée d'un angle $\alpha = 60°$ par rapport à l'horizontale et d'une partie circulaire BC de centre I et de rayon $r = 0,5\ m$ (voir figure ci-dessous).

1- Le point matériel S est lancée du point A avec une vitesse $V_A = 6\ m/s$. Il arrive au point B avec une vitesse nulle. Calculer la distance AB sachant que le point matériel est soumis à une force $\vec{f}$ parallèle et de sens contraire à celui de sa vitesse à chaque instant, d'intensité constante $f = 10^{-2}\ N$.

2- On néglige les frottements sur la partie circulaire BC. Calculer la vitesse V_C de S au point C.

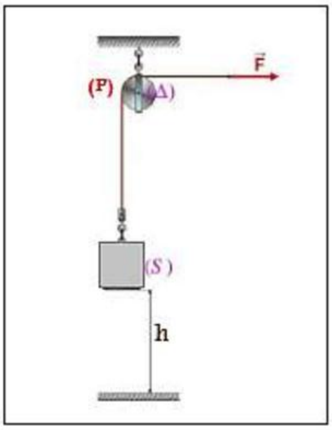
3- Le point matériel quitte le point C avec la vitesse V_C. Calculer la vitesse V_D du point matériel au point D.



Exercice 9 :

On considère le dispositif représenté dans le schéma ci-contre :

Un solide S de masse $m = 100\ kg$ est attaché par un fil enroulé sur la gorge d'une poulie est à son autre extrémité on applique une force $\vec{F}$ horizontale de valeur constante (voir figure).



On donne $g = 9{,}81\ N.kg^{-1}$

La poulie est homogène de rayon $R = 10cm$, peut tourner sans frottement autour de son axe de rotation Δ et de moment d'inertie $J_{\Delta} = 5.10^{-3}\ kg.m^2$.

Le solide à l'instant $t = 0$ sa vitesse est nulle, on applique la force $\vec{F}$, à l'instant t sa vitesse est V= $4m.s^{-1}$, à la hauteur $h = 5\ m$.

1)- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au solide S entre les deux instants $t = 0$ et $t = 10s$. Calculer la valeur de la force qu'applique le fil sur le solide.

2)- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la poulie entre les deux instants $t = 0$ et $t = 10s$. Calculer la valeur de la force $\vec{F}$.

Corrigés des exercices
Travail et énergie cinétique

Exercice 1 :

1- L'énergie cinétique de cylindre en translation :

$$E_C = \frac{1}{2}m.V^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \times 20 \times 20^2 = 4{,}0.10^3\ J$$

2- L'énergie cinétique de cylindre en rotation autour d'un axe fixe :

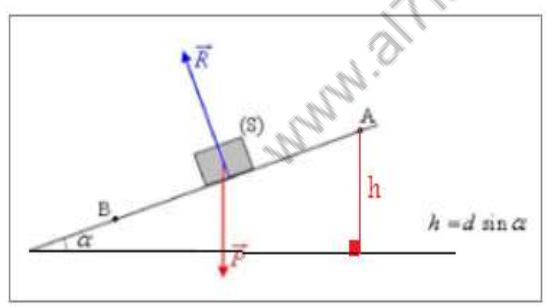
$$E_C = \frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2 = \frac{1}{2}m.R^2.\omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \times 20 \times 0{,}40^2 \times 50^2 = 2{,}0.10^3\ J$$

Exercice 2 :

- Calcule de l'angle α :

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :



$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2}m.V^2 = m.g(z_A - z_B) + R.AB.cos90°$$

$$\frac{1}{2}m.V^2 = m.g.h + 0$$

$$V^2 = 2g.AB.sin\alpha$$

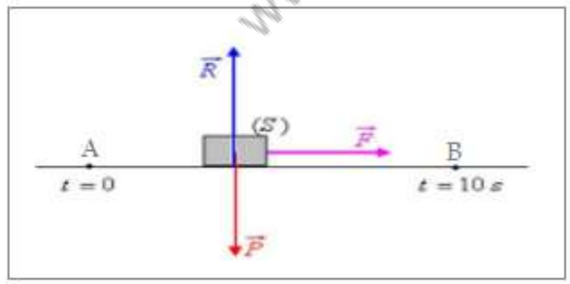
$$sin\alpha = \frac{V^2}{2g.AB}$$

$$sin\alpha = \frac{8{,}0^2}{2 \times 9{,}81 \times 10} = 0{,}326$$

$$\alpha = 19{,}0°$$

Exercice 3 :

1)- La valeur de la vitesse à l'instant $t = 10s$:



On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant $t = 0$ point A et l'instant $t = 10s$ point B :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R}) + W_{A\to B}(\vec{F})$$

$$\frac{1}{2}m.\text{v}'^2 - \frac{1}{2}m.\text{v}^2 = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{\mathcal{P}}.\Delta \boldsymbol{t}$$

$$\frac{1}{2}m(\text{v}'^2 - \text{v}^2) = 0 + 0 + \boldsymbol{\mathcal{P}}.\Delta \boldsymbol{t}$$

$$\text{v}'^2 - \text{v}^2 = \frac{2.\mathcal{P}.\Delta t}{m}$$

$$\text{v}'^2 = \text{v}^2 + \frac{2.\mathcal{P}.\Delta t}{m}$$

$$\text{v}' = \sqrt{\text{v}^2 + \frac{2.\mathcal{P}.\Delta t}{m}}$$

$$\text{v}' = \sqrt{\left(\frac{30}{3,6}\right)^2 + \frac{2 \times 66 \times 10^3 \times (10 - 0)}{1,5 \times 10^3}} = 30,8\ m.s^{-1}$$

$$\text{v}' = 30,8 \times 3,6 = 111\ km.h^{-1}$$

2- la valeur de la force $\vec{F}$ à l'instant $t = 10s$:

La puissance de la force $\vec{F}$ à l'instant $t = 10s$ est :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\overrightarrow{\text{v}'} = F.\text{v}'.cos0° = F.\text{v}'$$

$$F = \frac{\mathcal{P}}{\text{v}'}$$

$$F = \frac{66 \times 10^3}{30,8} = 2,1.10^3\ N$$

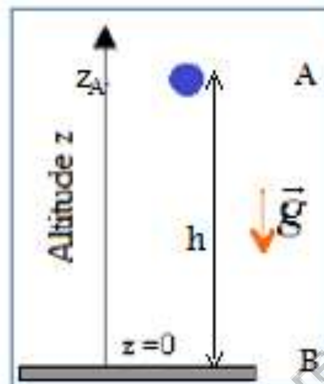
Exercice 4 :

1- La hauteur maximale atteinte par la bille :

Système étudié : la bille

Bilan des forces exercé : $\vec{P}$ poids de la bille

Etat du système	Etat initiale	Etat final
altitude	$z_A = 2,0\ m/s$	$z_B = ?$
Vitesse	$V_A = 10\ m/s$	$V_B = 0$



On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g(z_A - z_B)$$

$$-\frac{1}{2}V_A^2 = g(z_A - z_B) \Longrightarrow z_B = \frac{1}{2}.\frac{V_A^2}{g} + z_A$$

$$z_B = \frac{1}{2}.\frac{10^2}{10} + 2,0 \Longrightarrow z_B \simeq 7,1\ m$$

2- vitesse de la bille lorsqu'elle retombe sur le sol :

Etat du système	Etat initiale	Etat final
altitude	$z_B = 7,1\ m/s$	$z_0 = 0$
Vitesse	$V_B = 0$	$V_B = ?$

On applique de nouveau le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{C0} - E_{CB} = W_{B\to O}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.V_0^2 - \frac{1}{2}m.V_B^2 = m.g(z_B - z_O)$$

$$\frac{1}{2}V_0^2 = g.z_B \Longrightarrow V_O = \sqrt{2g.z_B}$$

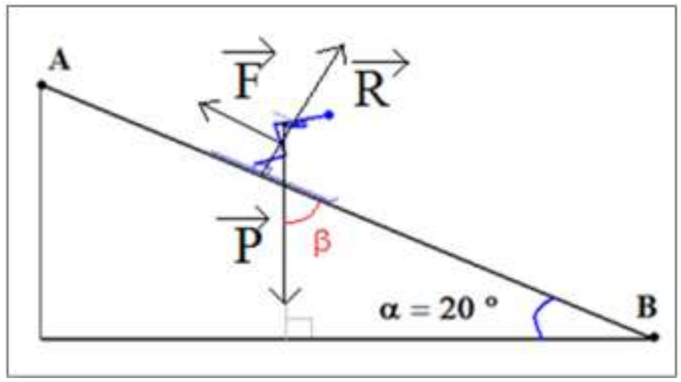
$$V_O = \sqrt{2 \times 10 \times 7,1} \Longrightarrow V_O \simeq 12\,m/s$$

Exercice 5 :

1- Représentation du skieur avec les différentes forces qui agissent sur lui :

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le skieur :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente, $\vec{f}$: la force de frottement parallèle à la pente et de sens contraire au déplacement.



2- le poids du skieur :

$$P = m.g = 80 \times 10 = 800N$$

L'angle β :

$$\beta = 180 - 90 - \alpha = 180 - 90 - 20 = 70°$$

3- Le travail du poids au cours de mouvement de A à B :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = P.AB.cos\beta$$

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = 800 \times 200 \times \cos(70°) = 5{,}47.10^4\ J$$

4- L'énergie cinétique du skieur à l'arrivée au B :

$$E_{C2} = \frac{1}{2}m.V_2^2$$

$$V_2 = \frac{30\ 000}{3600} = 8{,}3\ m/s$$

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \times 80 \times 8{,}3^2 = 2{,}8.10^3 J$$

5- L'expression du théorème de l'énergie cinétique appliqué au cas de ce skieur :

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = W_{B\to C}(\vec{P}) + W_{B\to C}(\vec{R}) + W_{B\to C}(\vec{F})$$

6- L'expression du travail de $\vec{f}$:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB.cos180° = -F.AB$$

7- L'intensité de la force f :

$$E_{C2} - E_{C1} = W_{B\to C}(\vec{P}) + W_{B\to C}(\vec{R}) + W_{B\to C}(\vec{F})$$

Avec $E_{C1} = 0$ et $W_{B\to C}(\vec{R}) = 0$

$$E_{C2} = W_{B\to C}(\vec{P}) + W_{B\to C}(\vec{F})$$

$$E_{C2} - W_{B\to C}(\vec{P}) = -F.AB$$

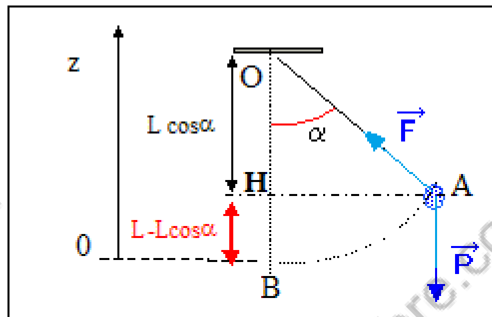
$$F = -\frac{E_{C2} - W_{B\to C}(\vec{P})}{AB}$$

$$F = -\frac{2,8.10^3 - 5,47.10^4}{200}$$

$$F = 2,6.10^2\ N$$

Exercice 6 :

– la vitesse de la bille à son passage par la position d'équilibre :



Système étudié : la bille

Forces extérieures appliquées au système :

Le poids : $\vec{P}$

La tension du fil : $\vec{T}$

Appliquant le théorème de l'énergie cinétique lors du passage de la bille du point A au point B :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{T})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g(z_A - z_B) + 0$$

$$V_A = 0\ et\ \ z_B = 0$$

$$z_A = OH = OB - OH = L - L.cos70° = L(1 - cos70°)$$

$$\frac{1}{2}V_B^2 = g.L(1 - cos70°)$$

$$V_B^2 = 2.g.L(1 - cos70°)$$

$$V_B = \sqrt{2.g.L(1 - cos70°)}$$

$$V_B = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1,00 \times (1 - cos70°)}$$

$$V_B \simeq 3,6\ m/s$$

Exercice 7 :

1)- La valeur de moment du couple de frottement :

Application du théorème de l'énergie cinétique entre l'instant d'arrêt du moteur et l'instant d'arrêt du cylindre :

$$E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) + W_f$$

$$0 - \frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2 = 0 + 0 + M_f.\Delta\theta$$

$$M_f.\Delta\theta = -\frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2$$

$$M_f = -\frac{J_\Delta.\omega^2}{2\Delta\theta}$$

$$\Delta\theta = 2\pi.n = 2\pi \times 120 = 240\pi\ rad$$

$$\omega = \frac{2\pi N(tr/\text{min})}{60} = \frac{2\pi \times 45}{60} = 1{,}5\ \pi\ rad.s^{-1}$$

$$M_f = -\frac{3.10^{-2} \times (1{,}5\pi)^2}{2 \times 240\pi} = -4{,}4.10^{-4}\ N.m$$

2- Le travail effectué par le moteur pendant une minute :

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre deux instants de durée $\Delta t = 1min$:

$$E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) + W_f + W_m$$

$$0 - 0 = 0 + 0 + M_f.\Delta\theta + W_m$$

$$W_m = -M_f.\omega.\Delta t$$

$$W_m = -(-4{,}4.10^{-4}) \times 1{,}5\pi \times 60 = 0{,}124\ J$$

La puissance du moteur :

$$\mathcal{P} = \frac{W_m}{\Delta t}$$

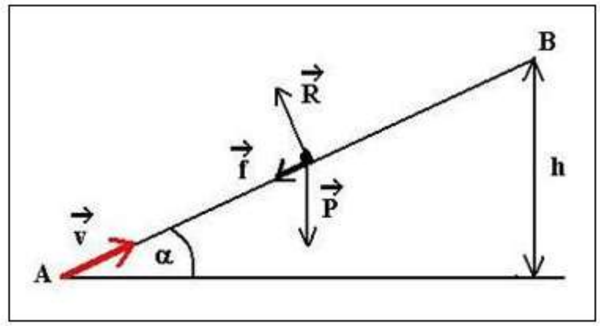
$$\mathcal{P} = \frac{0{,}124}{60} = 2{,}0.10^{-3}\ W \implies \mathcal{P} = 2{,}0\ mW$$

Exercice 8 :

1- La distance AB :

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente, $\vec{f}$: la force de frottement parallèle à la pente et de sens contraire au déplacement.



On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R}) + W_{A\to B}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} + \vec{f}.\overrightarrow{AB}$$

$$-\frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g.(z_A - z_B) + 0 + f.AB.cos180°$$

$$-\frac{1}{2}m.V_A^2 = -m.g.AB.sin\alpha - f.AB$$

$$\frac{1}{2}m.V_A^2 = AB(m.g.sin\alpha + f)$$

$$AB = \frac{m.V_A^2}{2(m.g.sin\alpha + f)}$$

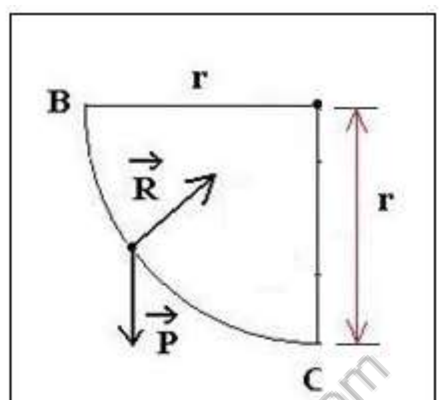
$$AB = \frac{50.10^{-3} \times 6^2}{2 \times (50.10^{-3} \times 10 \times \sin(60°) + 10^{-2})} \simeq 2{,}0\ m$$

2- La vitesse de S au point C :

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S entre B et C :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente (les frottements étant négligés).

On applique le théorème de l'énergie cinétique :



$$\Delta E_C = E_{CC} - E_{CB} = W_{B\to C}(\vec{P}) + W_{B\to C}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2}m.v_C^2 - \frac{1}{2}m.v_B^2 = mg(z_C - z_B)$$

$$\frac{1}{2}v_C^2 = g.r \quad \Rightarrow v_C = \sqrt{2g.r}$$

$$v_O = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}5} \Rightarrow v_O \simeq 3{,}16\, m/s$$

3- La vitesse de S au point D :

L'inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S entre B et C :

$\vec{P}$: Le poids vertical (corps en chute libre).

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre C et D :

$$\Delta E_C = E_{CD} - E_{CC} = W_{C\to D}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}m.v_D^2 - \frac{1}{2}m.v_C^2 = m.g(z_D - z_C)$$

$$\frac{1}{2}v_D^2 - \frac{1}{2}v_C^2 = g(AB.sin\alpha - r)$$

$$v_D^2 = 2.g(AB.sin\alpha - r) + v_C^2$$

$$v_D = \sqrt{2.g(AB.sin\alpha - r) + v_C^2}$$

$$v_D = \sqrt{2 \times 10 \times (2{,}0 \times \sin(60°) - 0{,}5) + 3{,}16^2}$$

$$v_D \approx 5{,}88\ m/s$$

Exercice 9 :

1- La valeur de la force qu'applique le fil sur le solide :

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et l'instant final :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{T})$$

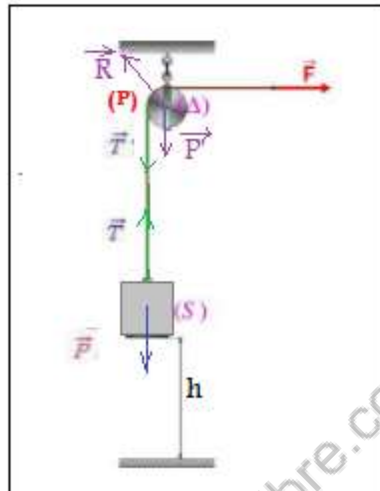
$$\frac{1}{2}m.\text{v}^2 = m.g(z_A - z_B) + T.AB.\cos 0$$

$$\frac{1}{2}m.\text{v}^2 = -m.g.h + T.h$$

$$T.h = m\,(\frac{1}{2}\text{v}^2 + g.h)$$

$$T = m\left(\frac{\text{v}^2}{2h} + g\right)$$

$$T = 100 \times \left(\frac{4^2}{2\times 5} + 9{,}81\right) = 1141\ N$$



2- La valeur de la force $\vec{F}$ entre l'instant initial et l'instant final :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W\left(\vec{P}\right) + W\left(\vec{R}\right) + W\left(\vec{F}\right) + W\left(\vec{T'}\right)$$

$$W(\vec{F}) = M_\Delta(\vec{F}).\Delta\theta = F.R.\Delta\theta = F.h \qquad (h = R.\Delta\theta)$$

$$W\left(\vec{T'}\right) = M_\Delta(\vec{T'}).\Delta\theta = -T'.R.\Delta\theta = -T'.h = -T.h \quad (T' = T)$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2 - 0 = 0 + 0 + F.h - T.h$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta.\frac{\text{v}^2}{R^2} = h.(F - T)$$

$$F - T = \frac{J_\Delta.\text{v}^2}{2R^2.h}$$

$$F = \frac{J_\Delta.\text{v}^2}{2R^2.h} + T$$

$$F = \frac{5.10^{-3}\times 4^2}{2\times 0{,}10^2\times 5} + 1141 = 1142\ N$$