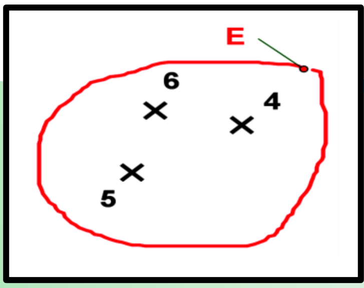
I. Détermination d'un ensemble :

A. Approche – vocabulaire :

Soit l'ensemble E des entiers naturels strictement compris entre 3 et 7 .
Question : écrire cet ensemble de deux façons différentes .



- 1ère façon : $E=\{4,5,6\}$. on dit que E est écrit en extension (écriture en extension)
- 2ième façon : $E=\{n\in\mathbb{N}/3<n<7\}$. on dit que E est écrit en compréhension (écriture en compréhension) .
- Certain ensemble on peut les représenter de le façon suivante : chaque élément de cet ensemble on l'écrit dans un endroit et à coté de lui on met le symbole $\times$ ou bien $\bullet$ puis on tourne tous les éléments par une ligne et è l'extérieur on écrit le symbole de l'ensemble E la figure obtenue s'appelle **diagramme de Venn**

B. Application :

1. Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

$F=]-5,5[$ - $A=\{0,2,4,6,\cdots\}$

2. Ecrire les ensembles suivants en extension :

$B=\{d\in\mathbb{N}/\exists k\in\mathbb{N},20=k\times d\}$ - $C=\{p\in\mathbb{Z}/(p-3)(2p-5)=0\}$.

II. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION – ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

A. L'INCLUSION - DOUBLE INCLUSION :

1. L'INCLUSION :

a. Définition :

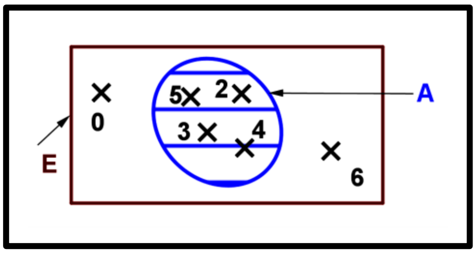
On dit qu'un ensemble A est un inclus dans un ensemble B si et seulement si tout élément x de A est aussi un élément de B . On note $A\subset B$.

b. Remarque : $A\subset B\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)$.

c. Exemple :

Soient les ensembles $E=\{0,2,3,4,5,6\}$ et $A=\{2,3,4,5\}$.

1. Donner le diagramme de Venn de A et E .



B. Egalité de deux ensembles (OU DOUBLE INCLUSION)

a. Définition :

On dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si $A\subset B$ et $B\subset A$.

b. Remarque : $A=B\Leftrightarrow(A\subset B \text{ et } B\subset A)$. Ou bien $A=B\Leftrightarrow(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$.

c. Exemple :

Soient les ensembles : $F=]0,1[$ et $E=\left\{\frac{1}{x}/x\in\mathbb{R} \text{ et } x>1\right\}$.

Démontrer que : $E=F$.

- On démontre que : $E\subset F$.

Soit $y\in E\Rightarrow y=\frac{1}{x}$ et $x>1$

$\Rightarrow x > 0$ et $\frac{1}{x} < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$

$\Rightarrow 0 < y < 1$

Conclusion 1 : $E \subset F$.

- **On démontre que :** $F \subset E$

Soit :

$y \in F \Rightarrow 0 < y < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \quad \left(\text{on pose } y = \frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow x > 1$ et $y = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y \in E$

Conclusion 1 : $F \subset E$

Par suite : $E \subset F$ et $F \subset E$.

Conclusion : $E = F$

C. ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE :

a. Activité :

Soit l'ensemble $E = \{1,2,3\}$. Donner toutes les parties de E.

les parties de E sont : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$.

b. Vocabulaire :

L'ensemble constitué par ses parties c.à.d. $\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

s'appelle **ensemble des parties d'un ensemble de** E **sera noté** $\mathcal{P}(E)$.

c. Définition :

E est un ensemble .
Toutes les parties de E constituent un ensemble s'appelle **ensemble des parties d'un ensemble de** E **sera noté** $\mathcal{P}(E)$.

d. Remarque :

- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$.
- Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont « sous forme des ensembles » .
- $E = \varnothing$ on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$.

e. Exemple :

Ecrire en extension $\mathcal{P}(E)$ tel que : 1) $E = \{2\}$. 2) $E = \{\varnothing\}$. 3) $E = \{1,2\}$. 4) $E = \{\{1,2\}\}$

Réponse :

- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\varnothing,\{2\}\}$
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.
- $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

- $\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(\{\{1,2\}\})=\{\varnothing,\{1,2\}\}$.

III. OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES :

A. INTERSECTION DE DEUX ENSEMBLES :

a. Définition :

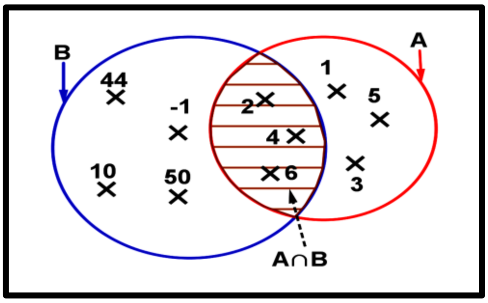
A et B sont deux ensembles .

Les éléments communs de A et B constituent l' ensembles noté $A\bigcap B$ appelé intersection de A et B

Donc : $A\bigcup B=\{x / x\in A \text{ et } x\in B\}$.

b. Remarque : $x\in A\bigcap B \Leftrightarrow (x\in A \text{ et } x\in B)$.

c. Exemple : soient : $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ et $B=\{-1,2,4,6,44,50\}$



d. Application :

$A=\{p\in\mathbb{Z} / 2\le |p| \le 5\}$ déterminer $A\cap]-\infty,3[$.

e. Propriétés :

A et B et C sont trois ensembles .

- $A\cap\varnothing=\varnothing$ et $A\cap A=A$
- $A\cap B\subset A$ et $A\cap B\subset B$
- $A\cap B=B\cap A$ ($\bigcap$ est commutative)
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C$ ($\bigcap$ est associative) .

f. Démonstration : $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

On a :

$$\begin{aligned} x\in(A\cap B)\cap C &\Leftrightarrow x\in A\cap B \text{ et } x\in C \\ &\Leftrightarrow (x\in A \text{ et } x\in B) \text{ et } x\in C \\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ et } (x\in B \text{ et } x\in C)(\text{la conjonction}(\text{et}) \text{ est associative}) \\ &\Leftrightarrow x\in A \text{ et } x\in A\bigcap B \\ &\Leftrightarrow x\in A\bigcap(A\bigcap B) \end{aligned}$$

Conclusion : $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

B. L'UNION :

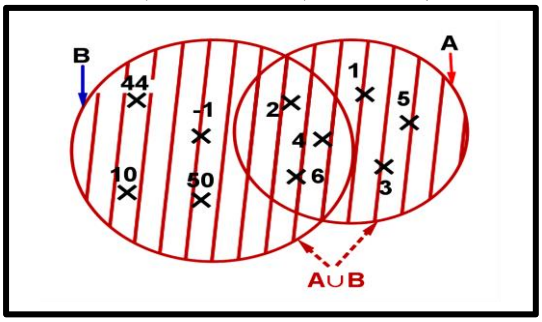
a. Définition :

A et B sont deux ensembles .

Les éléments qui appartiennent à A ou à B constituent l' ensembles noté $A\bigcup B$ appelé union de A et B . Donc : $A\bigcup B=\{x / x\in A \text{ ou } x\in B\}$

b. **Remarque :** $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$.

c. **Exemple :** soient : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,44,50\}$



d. **Propriétés :**

A et B et C sont trois ensembles .

- $A \cup \varnothing = A$ et $A \cup A = A$
- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $\bigcup$ est commutative : $A \cup B = B \cup A$.
- $\bigcup$ est associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
- $\bigcup$ est distributive sur $\bigcap$: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \end{cases}$

e. **Application :**

Démontrer que : $\bigcap$ est distributive sur $\bigcup$.

- On montre que : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ‘ la distributivité à gauche de $\bigcap$ sur $\bigcup$.

On a :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ (la conjonction est distrubitive sur la disjonction)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Conclusion 1 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- On montre que : $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ ‘ la distributivité à gauche de $\bigcap$ sur $\bigcup$.

On a :

$$\begin{aligned} (B \cup C) \cap A &= A \cap (B \cup C) \quad (\cap \text{ est commutative}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{ d'après la conclusion 1}) \\ &= (B \cap A) \cup (C \cap A) \quad (\cap \text{ est commutative}) \end{aligned}$$

Conclusion 2 : $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.

Conclusion l'intersection **est distributive sur** l'union .

C. **Partie complémentaire :**

a. **Définition :**

A est une partie d'un ensemble E $(A \subset E)$.

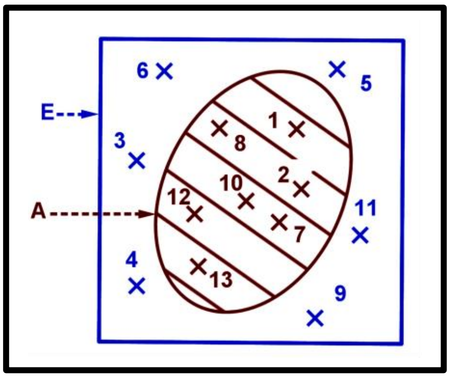
L'ensemble B qui contient tous les éléments de E et qui n'appartiennent pas à la parie A s'appelle la partie complémentaire de A dans E, on note $B = \complement_E^A$ ou encore $B = \overline{A}$.

Donc : $B = \complement_E^A = \{x \in E /\ x \notin A\}$

b. Remarques :

- $x \in C_E^A \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$.
- $x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$

c. Exemples :



- soient :

$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ et $A = \{1,2,7,8,10,12,13\}$

on a $A \subset E$ d'où : $\complement_E^A = \{3,4,5,6,9,11\}$.

- $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}^{-*}$ et $C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} =]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

d. Propriétés :

E est un ensemble .

- $C_E^{\varnothing} = E$ et $C_E^E = \varnothing$.
- $\overline{\overline{A}} = A$ c.à.d. $C_E^{C_E^A} = A$.
- $A \cap \overline{A} = A \cap C_E^A = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = A \cup C_E^A = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

e. Démonstration :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Rappel : $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in E \cap E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \qquad ; (E \cap E = E) \\ &\Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A) \text{ et } (x \in E \text{ et } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

Conclusion : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Rappel : $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

On a :

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B}$$
$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

Conclusion : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

D. La différence de deux ensembles :

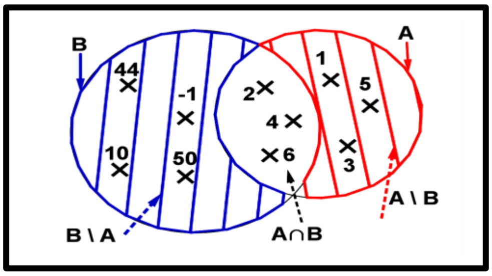
a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
Les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B constituent l' ensembles qui est noté $A \backslash B$ appelé différence de l'ensemble A et l'ensemble B (l'ordre est important) .
Donc : $A \backslash B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

b. Remarque : $x \in A \backslash B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$.

c. Exemple : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,10,44,50\}$

On a : $A \backslash B = \{1,3,5\}$ et $B \backslash A = \{-1,10,44,50\}$.



d. Exercice :

Déterminer : $A \backslash B$ puis $B \backslash A$ avec :

- $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}^*$.
- $A = \mathbb{R}$ et $B = [1,5[$

E. La différence symétrique :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
La différence symétrique de A et B est l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
Donc : $A \Delta B = \{x / (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}$

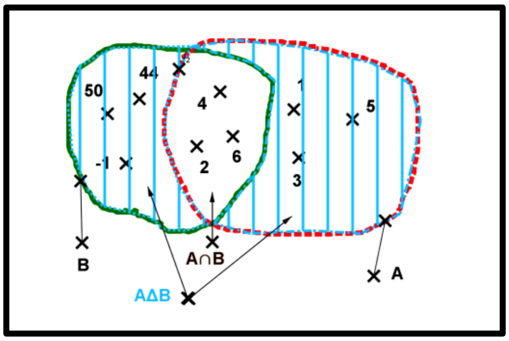
b. Remarques :

- $A \Delta B = B \Delta A$.
- $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
- $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
- $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B$

Exemple : $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $B = \{-1,2,4,6,10,44,50\}$

- On représente $A \cap B$ et $A \Delta B$ par un diagramme de Venn

On a : $A \Delta B = \{1,3,5,-1,44,50\}$ et $A \cap B = \{2,4,6\}$.



F. Produit cartésien de deux ensembles :

a. Définition :

A et B sont deux ensembles .
Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ qui est constitué par tous les couples (x, y) tel que $x \in A$ et $y \in B$ ..

Donc : $A\times B=\{(x,y)/x\in A \text{ et } y\in B\}$

b. Remarques :

- $(x,y)\in A\times B \Leftrightarrow (x\in A \text{ et } y\in B)$
- $E\times\varnothing=\varnothing\times E=\varnothing$.
- $A\times B\neq B\times A$ (en général)
- Si $A=B$ on note : $A\times A=A^2$
- $B\times A=\{(x,y)/x\in B \text{ et } y\in A\}$

c. Exemple : $A=\{1,2\}$ et $B=\{a,b,c\}$

- On représente $A\cap B$ et $A\Delta B$ par un diagramme de Venn

On a : $A\times B=\{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);(2,b);(2,c)\}$.

d. Application :

1. Ecrire en extension $E\times F$ tel que : $E=\{1,2\}$ et $F=\{1,2,3\}$.
2. $A\subset E$ et $B\subset F$. Montrer que : $(A\subset E \;\; B\subset F)\Rightarrow A\times B\subset E\times F$.

e. Généralisation :

1. E_1 et E_2 et E_3 sont trois ensembles .

- $x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ et $x_3\in E_3$ l'écriture (x_1,x_2,x_3) s'appelle le triplet est un élément de l'ensemble qui est noté $E_1\times E_2\times E_3$, on l'appelle produit cartésien de E_1 et E_2 et E_3 dans cet ordre .
- $E_1\times E_2\times E_3=\{(x,y,z)/x\in E_1 \text{ et } y\in E_2 \text{ et } z\in E_3\}$.

Cas général :

2. On considère les ensembles E_i avec $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$.

- le produit cartésien de E_1 et E_2 et E_3 et ….et E_n dans cet ordre est l'ensemble qui est noté $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ ou encore $\prod_{j=1}^{j=n}E_j$.
- Les éléments de $\prod_{j=1}^{j=n}E_j$ sont notés par $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ chaque élément s'appelle $n-$uplet avec $x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ et $x_3\in E_3$ et ….et $x_n\in E_n$.
- $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in\prod_{j=1}^{j=n}E_j \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,...,x_n)\in E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$

  $\Leftrightarrow x_1\in E_1$ et $x_2\in E_2$ et ….et $x_n\in E_n$ (ou $x_i\in E_i$, $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$)
- Cas particulier : $E_1=E_2=\cdots=E_n=E$ on note $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n=E^n$
- Exemple: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ d'où le triplet $(2,-5,\sqrt{7})$ est un élément de $\mathbb{R}^3$ on écrit $(2,-5,\sqrt{7})\in\mathbb{R}^3$

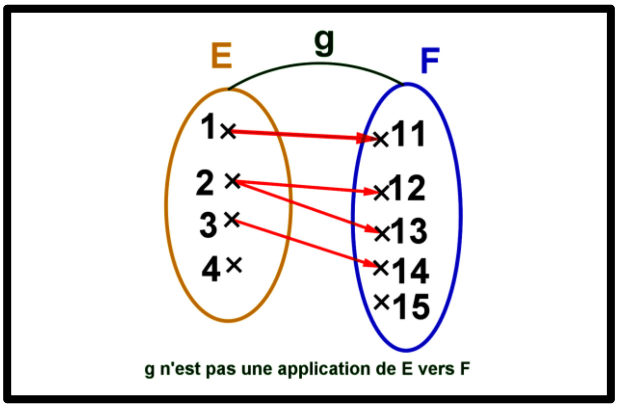
I. GENERALITES :

A. Application :

a. Activité :

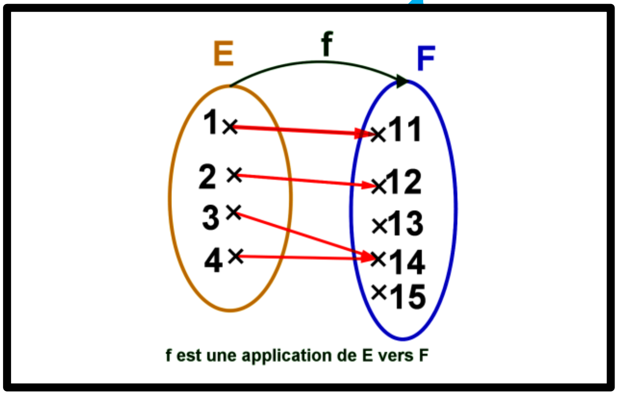
- On considère les ensembles $E=\{1,2,3,4\}$ et $F=\{11,12,13,14,15\}$.
- On considère la relation f (ou g) qui associe élément de E par un élément de F voir figures

Cas N° 1



g n'est pas une application de E vers F

Cas N° 2



f est une application de E vers F

Que remarquez vous ?

b. Vocabulaire :

- La relation f est appelée application de E vers F on note f ou g ou h .
- L'ensemble E est appelé ensemble de départ (ou de source)
- L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivé (ou de but)
- Elément de E on le note par x et on l'appelle antécédent .
- Elément de F on le note par y et on l'appelle image .
- L'application f qui associe x par y pour cela on note $f(x)=y$.
- On résume ce qui précède par : $f: E \to F$

$$x \mapsto f(x)=y$$

c. Définition :

Soient E et F deux ensembles non vides .
Toute relation f qui associe chaque élément x de E par un et un seul élément y de F est appelée application de E vers F, on la note par : $\begin{aligned} f: E &\to F \\ x &\mapsto f(x)=y \end{aligned}$ ou encore $f: E \to F$

d. Remarque :

- Toute fonction est une application de son ensemble de définition D_f vers $\mathbb{R}$.
- Toute application $f: E \to F$ est une fonction de $f: E \to F$.
- Si $F=E$ on dit que f est une application dans E .
- Soient f et g deux applications tel que :

$\begin{aligned} f: E &\to F \\ x &\mapsto f(x)=y \end{aligned}$ et $\begin{aligned} g: E' &\to F' \\ x &\mapsto g(x)=y \end{aligned}$ sont égales si et seulement $\left.\begin{aligned} &E=E' \ \wedge \ F=F' \\ &\forall x \in E: f(x)=g(x) \end{aligned}\right\}$

On note $f=g$

e. Applications :

❖ On considère l'application : $\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto f(n)=|n| \end{aligned}$

1. Déterminer les images de 0 et -2 et 3 .

2. Déterminer les antécédents de 1 et 0 et 3.

3. Est-ce que l'implication $f(n)=f(n') \Rightarrow n=n'$ est vraie ?

❖ On considère l'application : $$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ & (n,m) \mapsto f((n,m)) = n\times m \end{array}$$

1. Déterminer les images de $(1,0)$ et $(2,-3)$ et $(-6,1)$.

2. Déterminer les antécédents de 1 et 6 et 0.

3. Est-ce que pour tout (n,m) et (n',m') de $\mathbb{N}^2$, l'implication $f((n,m))=f((n',m')) \Rightarrow (n=n' \text{ et } m=m')$ est vraie ?

❖ On considère les deux applications : $$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g(x) = x^2-1 \end{array}$$

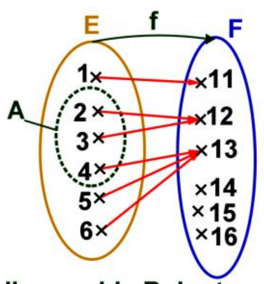
1. Est-ce que $f=g$?

B. L'image directe d'une partie A de l'ensemble de départ - L'image réciproque d'une partie B de l'ensemble d'arrivé .

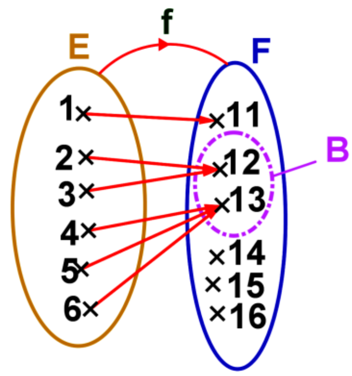
a. Activité : on considère l' applications suivante :

1. déterminer la partie B de F tel que ses éléments sont : les images des éléments de A

2. déterminer la partie C de E tel que ses éléments sont : les antécédents des éléments de B

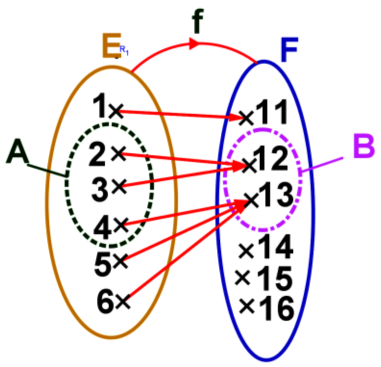


déterminer l'ensemble B dont ses éléments sont :
les images des éléments de la partie A de E

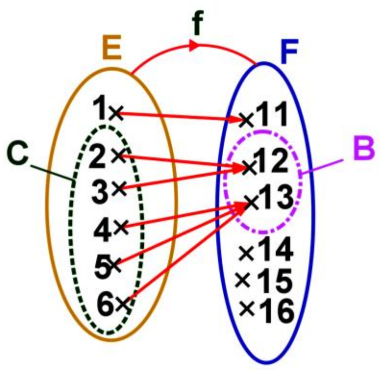


déterminer l'ensemble C dont ses éléments sont :
les antécédents des éléments de la partie B de F

b. Réponse :



l'ensemble B dont ses éléments sont les images :
des éléments de la partie A , on note f (A) = B



l'ensemble C dont ses éléments sont les antécédents des éléments:
de la partie B de F , on note C par f^{-1} (B) = C

c. Vocabulaire :

1 la partie $B=\{12,13\}$ est appelée **l'image directe** de la partie A de l'ensemble de départ E

et on note : $B=f(A)$

et on a $f(A)=\{f(x)/x\in A\}$

2 la partie $C=\{2,3,4,5,6\}$ est appelée **l'image réciproque** de la partie B de l'ensemble d'arrivé E

et on note : $C=f^{-1}(B)$

et on a : $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$

d. Définitions :

Définition 1 : (l'image directe)

$f:E\to F$ est une application et A est une partie de E $(A\subset E)$.

Les images des éléments de la partie A de E constitue une partie B de F est appelée image directe de A et on note $B=f(A)$ ou encore $B=f(A)=\{f(x)/x\in A\}\subset F$.

D'où : $y\in f(A)\Leftrightarrow \exists x\in A\ ,\ y=f(x)$.

Définition 1 : (l'image réciproque)

$f:E\to F$ est une application et B est une partie de F $(B\subset F)$.

Les antécédents des éléments de la partie B de E constitue une partie C de E est appelée image réciproque de B ou encore $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}\subset E$.

D'où : $x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$.

e. Application :

❖ On considère l'application suivante : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto f(n)=2n$

1. Déterminer $f(\{0,1,2,5\})$ et $f^{-1}(\{4,6,12\})$.

2. Déterminer : $f(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\})=f^{-1}(2\mathbb{N})$.

3. Est-ce que l'implication suivante est vraie: $\forall n,n'\in\mathbb{N} : f(n)=f(n')\Rightarrow n=n'$.

❖ On considère l'application suivante : $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $X=(a,b)\mapsto f(X)=f((a,b))=a$

1. Déterminer $f((2,1))$ et $f((2,7))$.

2. Ecrire en compréhension $f^{-1}(\{2\})$ (c.à.d. ensemble des antécédents de 2) :

3. Est-ce que l'implication suivante est vraie:
$\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2,\forall(a',b')\in\mathbb{N}^2 : f((a,b))=f((a',b'))\Rightarrow(a,b)=(a',b')$.

f. Propriétés :

- $f:E\to F$ est une application
- A et B deux parties d'un ensemble E (de départ). C et D deux parties d'un ensemble F (d'arrivé)

1. $A\subset B\Rightarrow f(A)\subset f(B)$.
2. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.
3. $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
4. $C\subset D\Rightarrow f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$.
5. $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

6. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

g. **Démonstration :**

1. Montrons que : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

   On a $A \subset B$ et on démontre que $f(A) \subset f(B)$.

   Soit $y_A \in f(A)$

   D'où $y_A \in f(A) \Leftrightarrow \exists x_A \in A / y_A = f(x_A)$ (1)

   Donc : $(1) \Rightarrow \exists x_A \in B / y_A = f(x_A)$ (car $A \subset B$) .

   Par suite : $f(x_A) \in f(B)$.

   Conclusion : $f(A) \subset f(B)$.

2. Montrons que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

- D'abord , on montre que : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

  Soit y de $f(A \cup B)$ donc il existe $x \in A \cup B$ tel que : $y = f(x)$.

  D'où : $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$

  $\Rightarrow (f(x) \in f(A) \text{ et } f(x) \in f(B))$

  $\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

  Conclusion 1 : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

- Montrons que : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

  On a : $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$ (d'après 1) .

  $B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$

  donc : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

  Conclusion 2 : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

  Conclusion : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3. Montrons que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

   Soit y de $f(A \cap B)$ donc il existe $x \in A \cap B$ tel que : $y = f(x)$.

   $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B$

   $\Rightarrow f(x) \in f(A) \text{ et } f(x) \in f(B)$

   $\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

   Conclusion : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4. Montrons que : $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

   Soit : x de $f^{-1}(C)$

   $x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C$

   $\Rightarrow f(x) \in D$; $(C \subset D)$

   $\Rightarrow x \in f^{-1}(D)$

   Conclusion : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

5. Montrons que : $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

- D'abord , on montre que : $f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

On a : $\left.\begin{array}{l} A\cap B\subset A\Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A) \\ A\cap B\subset B\Rightarrow f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(B)\end{array}\right\}$ donc : $f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

- Montrons que : $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cap D)$

Soit x de $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

$x\in f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ et $x\in f^{-1}(D)$.

$\Rightarrow f(x)\in C$ et $f(x)\in D$

$\Rightarrow f(x)\in C\cap D$

$\Rightarrow x\in f^{-1}(C\cap D)$

D'où : $f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cap D)$

Conclusion : $f^{-1}(C\cap D)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$.

6. Montrons que : $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

- D'abord , on montre que : $f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cup D)$

On a : $\left.\begin{array}{l} A\subset A\cup B\Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(A\cup B) \\ B\subset A\cup B\Rightarrow f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)\end{array}\right\}$ donc : $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$

Conclusion 1 : $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$

- Montrons que : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Soit x de $f^{-1}(C\cup D)$

$x\in f^{-1}(C\cup D)\Rightarrow f(x)\in C\cup D$

$\Rightarrow f(x)\in C$ et $f(x)\in D$

1^er cas $f(x)\in C$

Donc : $x\in f^{-1}(C)$ et on sait que $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

2^ième cas : $f(x)\in D$

Donc : $x\in f^{-1}(D)$ et on sait que $f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Pour les deux cas on a : $x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Par suite : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$.

Conclusion 2 : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

Conclusion : $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

Remarque : on peut démontrer que par les équivalences successives .

C. Restriction d'une fonction – prolongement d'une fonction :

a. Activité : On considère les deux applications $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=|x|-5x\end{array}$ et $\begin{array}{l} g:[0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=-4x\end{array}$.

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$

2. Quelle relation relie les deux fonctions .
Réponse pour la 2ième
Relations :

- $[0,+\infty[\subset \mathbb{R}$.
- $\forall x\in[0,+\infty[\ , g(x)=f(x)$

b. Vocabulaire :

- L'application g restreint à donner les images des x de $[0,+\infty[$; pour cela l'application g est appelé restriction de f sur $[0,+\infty[$.
- l'application f est appelé prolongement de g sur $\mathbb{R}$. (f continue à donner les images x de $]-\infty,0[$ car g est définie juste sur $[0,+\infty[$) .

c. définition 1 :

$f : E\to F$ est une application et B est une partie de F $(B\subset F)$.
Toute application g tel que :

1. Ensemble de départ est une partie A de E ($A\subset E$) .
2. $\forall x\in A : g(x)=f(x)$.

l'application g est appelée restriction de f sur A . donc : $\begin{array}{l} g : A\ (A\subset E)\to F \\ x\mapsto g(x)=f(x)\end{array}$

d. définition 2 :

$f : E\to F$ est une application et B est un ensemble tel que $E\subset B$.
Toute application h tel que :

3. Ensemble de départ est B avec $(E\subset B)$.
4. $\forall x\in E\ , h(x)=f(x)$.

l'application h est appelée prolongement de f sur B . donc : $\begin{cases} x\in E\ , h(x)=f(x) \\ x\in B\setminus E\ , h(x)=h(x)\end{cases}$.

e. Remarque : prolongement n'est pas unique

f. Application :

❖ On considère les deux applications : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=|x|-5x\end{array}$ et $\begin{array}{l} g : [0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=-4x\end{array}$

1. Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0,+\infty[$

❖ On considère les applications : $\begin{array}{l} f : [-1,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=2x^3\end{array}$ et $\begin{array}{l} g : [0,+\infty[\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=-4x\end{array}$

2. Est-ce que l'application g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$?

avec : $\begin{array}{l} g : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto g(x)=-2x^4+2x^3|x+1|\end{array}$

II. APPLICATION : INJECTIVE – SURJECTIVE – BIJECTIVE ET LA BIJECTION R2CIPROQUE :

A. APPLICATION INJECTIVE

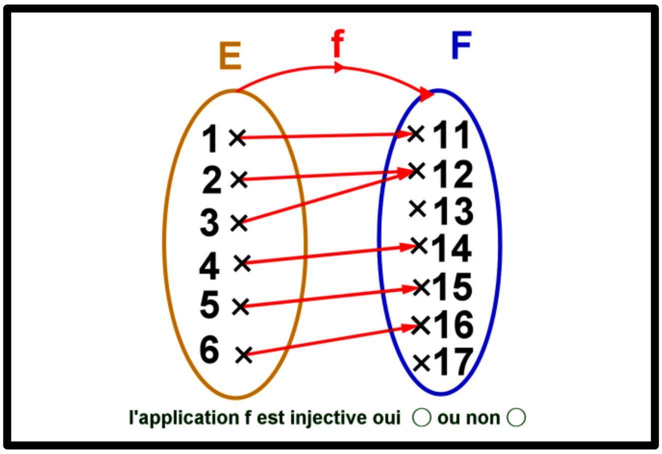
a. Définition :

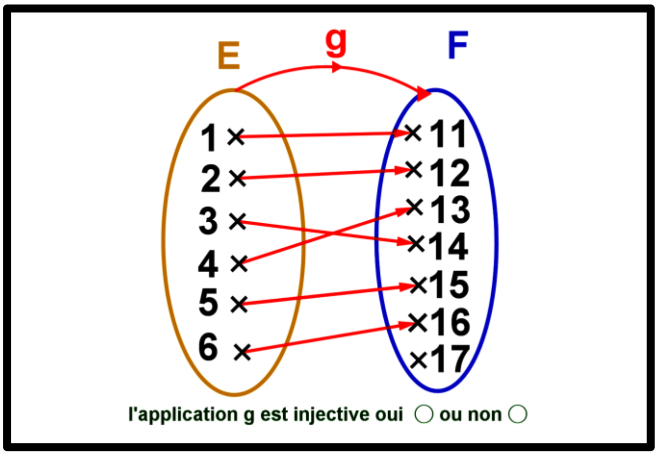
$f : E \to F$ est une application .

f est appelée application injective (ou f est une injection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au plus un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est injective) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right)$

b. exemple : On considère les deux applications suivantes :





c. Application : On considère l'applications :

$$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f((x,y)) = (x,0)$$

1. Est-ce que l'application f est injective ?

B. APPLICATION SURJECTIVE :

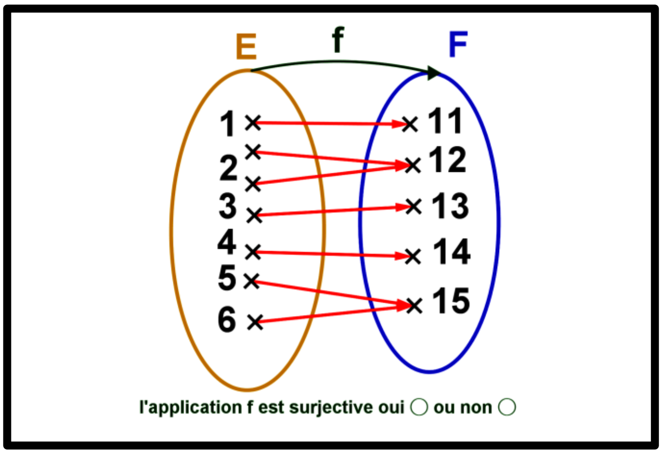
a. Définition :

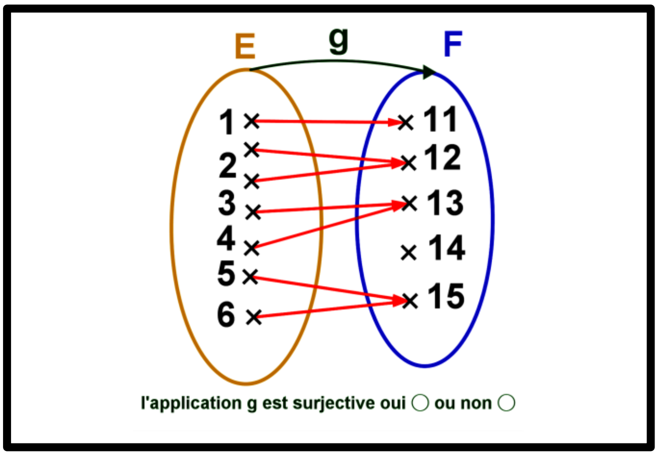
$f : E \to F$ est une application .

f est appelée application surjective (ou f est une surjection) si et seulement si pour chaque élément y de F a au moins un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore : (f est surjective) $\Leftrightarrow$ $\left(\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)\right)$

a. exemple : On considère les deux applications suivantes :





b. Remarque :

- Pour démontrer que f est surjective , il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet au moins une solution x

dans E pour tout y de F. (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F).

- (f est surjective) $\Leftrightarrow$ $f(E)=F$.

c. Application :

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=3|x| \end{aligned}$

1. Est-ce que f est surjective ?

2. Est-ce que g la restriction de f sur $[0,+\infty[$ surjective tel que : $\begin{aligned} g : [0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x)=3x|x+1|-3x^2 \end{aligned}$?

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f((x,y))=(x,0) \end{aligned}$

1. Est-ce que f est surjective ?

❖ On considère l'application suivante : $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=x^2-2x \end{aligned}$

1. Est-ce que f est surjective ?

C. APPLICATION BIJECTIVE L'APPLICATION RECIPROQUE :

a. Définition :

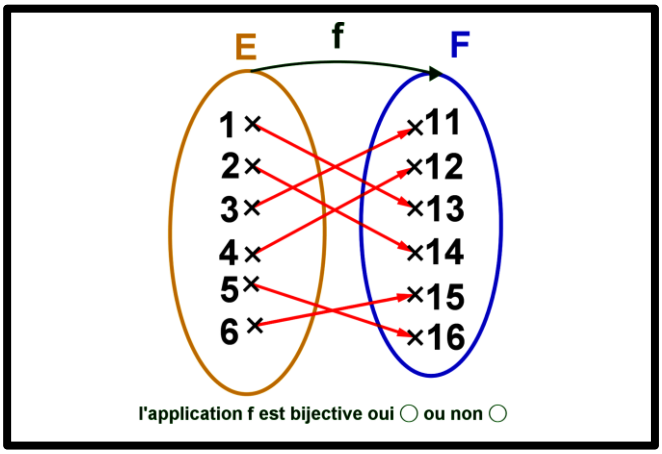
$f : E \to F$ est une application .

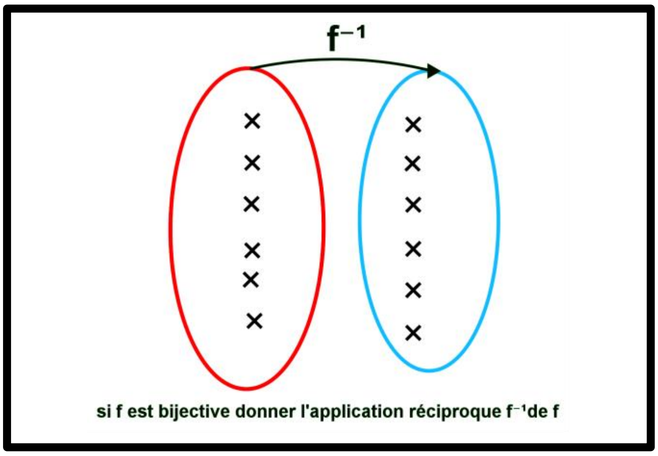
- f est appelée application bijective (ou f est une bijection) si et seulement si pour chaque élément y de F a un et un seul antécédent x de l'ensemble de départ E .

  Ou encore : (f est bijective) $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F, \exists! x \in E : y=f(x))$.

- L'application g de F vers E qui associe à chaque élément y de F par l'unique élément x de E tel que $f(x)=y$ est appelée application réciproque de l'application f et on note $g=f^{-1}$

b. Exemple : On considère les deux applications suivantes :





b. Remarques :

- (f est une application bijective) $\Leftrightarrow$ (f est injective et surjective) .
- L' application réciproque f^{-1} s'écrit de la façon suivante :

$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ y &\mapsto f^{-1}(y)=x \end{aligned}$ ou encore : $\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ x &\mapsto f^{-1}(x) \end{aligned}$ (on utilise le variable x au lieu de y .

- Relation entre f et f^{-1} est : $\left.\begin{array}{l} x=f(x) \\ x\in E \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{-1}(y)=x \\ y\in F \end{array}\right.$.
- Pour démontrer que f est bijective , il suffit de démontrer que l'équation $x\in E : f(x)=y$ admet une solution unique x dans E pour tout y de F . (l'inconnue est x mais y représente les éléments de F) .

c. Application :

- On considère l'application suivante : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=3x-2 \end{array}$

1. Est-ce que f est bijective ?

2. Si oui déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

- On considère l'application suivante : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=x^2-2x \end{array}$

1. Est-ce que f est surjective ?

- On considère l'application suivante : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto f(x)=x^2-2x \end{array}$

1. Est-ce que f est bijective ?

2. Si oui déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

III. COMPOSEE DES APPLICATIONS :

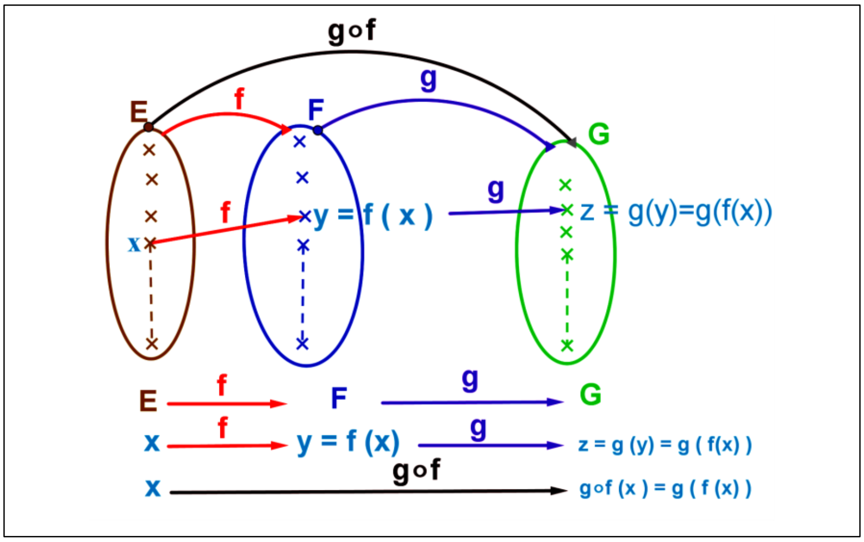
a. Définition :

On considère les deux applications : $f:E\to F$ et $g:F\to G$.

L'application $h:E\to G$ définie par : $\forall x\in E\ :\ h(x)=g(f(x))$ est appelée la composée de f et g dans cet ordre , et on note par : $g\circ f$.

Donc : $\begin{array}{l} h=g\circ f:E\to G \\ x\mapsto h(x)=g\circ f(x)=g(f(x)) \end{array}$

b. Eclaircis:



c. Remarques :

- La composée de deux applications n'est pas toujours commutative : $f\circ g\neq g\circ f$ (en général)
- La composée des applications est associative $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ on peut écrire $f\circ g\circ h$

- f est une application bijective et f^{-1} l'application réciproque de f on a :

1. $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ donc $f \circ f^{-1} = Id_F$ (Id_F application identique sur F).
2. $\forall x \in E : f^{-1} \circ f(x) = x$ donc $f^{-1} \circ f = Id_E$ (Id_E application identique sur E).
3. Explication pour la dernière remarque :

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x \mapsto & & f(x) = y & \mapsto & f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x \end{array}}_{f^{-1} \circ f = Id_E}$$

donc $\forall x \in E : f^{-1}(f(x)) = x$ ou $f^{-1} \circ f = Id_E$

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{f^{-1}} & E & \xrightarrow{f} & F \\ y \mapsto & & f^{-1}(y) = x & \mapsto & f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \end{array}}_{f \circ f^{-1} = Id_F}$$

donc $\forall x \in F : f \circ f^{-1}(x) = x$ ou $f \circ f^{-1} = Id_F$

d. Application :

❖ On considère les deux applications : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = 4x^3 - 2x \end{array}$ et $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \end{array}$

1. Déterminer : $g \circ f$ puis $f \circ g$.

❖ On considère l'application suivante : $\begin{array}{l} f : [0;2] \to [0;2] \\ x \mapsto f(x) = \left(\sqrt{2} - \sqrt{x}\right)^2 \end{array}$

1. Montrer que f est une application bijective .

2. Calculer $f \circ f(x)$ puis on déduit l'application réciproque f^{-1} de l'application f .