Matière : mathématique Prof : Youssef SEMHI	Cours : Généralités sur les fonctions Niveau : 1 bac science expérimental	Lycée : Mohammed Serraj Sidi Yahya Zair Provence : Skhirate-Temara

Contenu du programme :

- **La fonction majorée et la fonction minorée.**
- **La fonction bornée et la fonction périodique.**
- **Comparaison de deux fonctions, interprétation géométrique.**
- **Les asymptotes d'une fonction.**
- **Monotonie d'une fonction numérique.**
- **Composition de deux fonctions numériques.**
- **Monotonie de la composition de deux fonctions monotones.**
- **Représentation graphique des deux fonctions $x \to \sqrt{x+a}$ et $x \to ax^3$.**

Compétences attendues :

- **Comparaison de deux expressions en utilisant différentes techniques.**
- **Déduction des variations d'une fonction ou de ses valeurs maximales et minimales à partir de sa représentation graphique ou de son tableau de variations.**
- **Reconnaissance des variations des fonctions de la forme $f+a$ et $a \times f$ à partir des variations de la fonction f.**
- **Utilisation de la représentation graphique d'une fonction ou de son tableau de variations pour déterminer l'image d'un intervalle et résoudre certaines équations et inéquations.**

durée	Cours	remarques

I. Rappels

a) *Fonction numérique*

Définition : toute relation f qui associe élément x de R par un élément au plus y de R est appelée fonction numérique de la variable réelle x on note $x \to f(x)$.

Tous les éléments x de R qui ont images par f constituent un ensemble, on l'appelle ensemble de définition on la note D_f

b) *Fonction paire – fonction impaire*

Définition : f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f.

- f est paire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : -x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(-x) = f(x) \end{cases}$
- f est impaire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : -x \in D_f \\ \forall x \in D_f : f(-x) = -f(x) \end{cases}$

c) *Monotonie d'une fonction numérique*

Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur intervalle I

- f est une fonction croissante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I : x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')\right)$
- f est une fonction strictement croissante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I : x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')\right)$
- f est une fonction décroissante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I : x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')\right)$
- f est une fonction strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I : x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')\right)$

d) *Application*

On considère la fonction numérique f de la variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de f
3) Etudier la monotonie de f sur $[0,1[$ puis sur $]1, +\infty[$
4) On déduire la monotonie de f sur $]-1,0]$ puis sur $]-\infty, -1[$
5) Dresser le tableau de variation de f sur D_f

II. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée

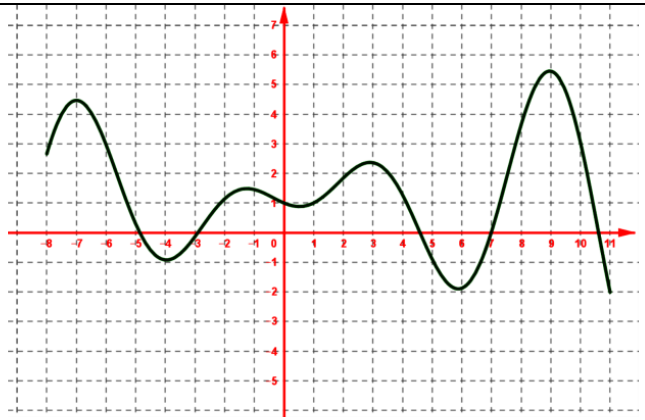
Définitions : soit f une fonction de la variable x définie sur $I \subset D_f$. M et m de R.

- La fonction f est majorée par M sur I si et seulement si : $\forall x \in I : f(x) \leq M$
- La fonction f est minorée par m sur I si et seulement si : $\forall x \in I : f(x) \geq m$
- La fonction f est bornée sur I si et seulement si f est majorée et minorée sur I

Application :

La figure ci-dessous représente la courbe d'une fonction f.

Est-ce que f est majorée ? f est minorée ? f est bornée ? sur $[-8,11]$



III. Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

a) Fonction positive – fonction négative :

Définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f :

- f est une fonction positive sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$.
- f est une fonction négative sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) \leq 0$.

b) Comparaison de deux fonctions :

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

- $(f \leq g \;\; sur\; I\,) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$
- $(f \geq g \;\; sur\; I\,) \Leftrightarrow \big(\forall x \in I : f(x) \geq g(x)\big)$
- $(f = g \;\; sur\; I\,) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$

IV. Composée de deux fonctions

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$

On pose $D_{gof} = \{x \in R : x \in D_f \; et \; f(x) \in D_g\}$

La fonction h définie sur D_{gof} par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée des fonction f et g noté par $h = gof$

Exemple :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement par $f(x) = 2x^2 + 3x$ et $g(x) = 5x - 7$

1) Déterminer D_{gof} puis D_{fog}
2) Calculer gof et fog
3) Calculer $fog(2)$ puis $gof(2)$

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$

- Si f et g ont même monotonie respectivement sur D_f et $f(D_f)$ alors gof est croissante sur D_f
- Si f et g ont monotonies opposées respectivement sur D_f et $f(D_f)$ alors gof est décroissante sur D_f

Exemple :

Soient f *et* g deux fonctions définies respectivement par $f(x) = |x| + 5$ et $g(x) = x^2$

1) Déterminer D_f et D_g
2) Etudier la monotonie de f et g
3) Déterminer la monotonie de gof sur R

V. Applications sur les fonctions $x \to \sqrt{x+a}$ et $x \to ax^3$

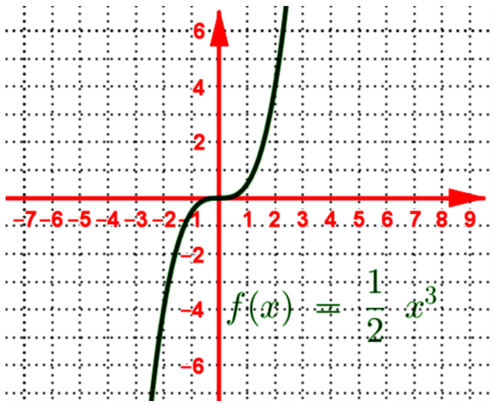
a) Fonctions $x \to ax^3$

Soient f *et* g deux fonctions tell que $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ et $g(x) = -\frac{2}{3}x^3$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↗

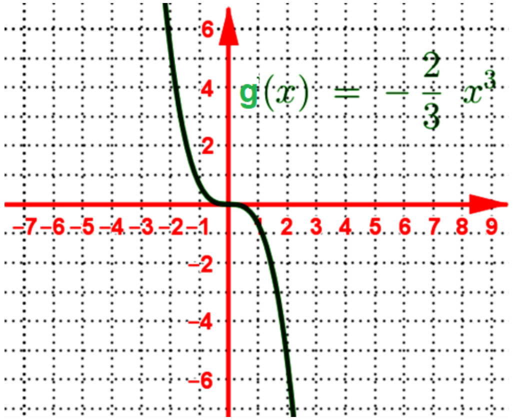
La courbe de f dans un repère orthonormé :



Le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↘

La courbe de la fonction g :



b) Fonctions $\boldsymbol{x \to \sqrt{x+a}}$

f est définie sur $[-a, +\infty[$

Soient x et x' de D_f tell que $x < x'$. On a : $x < x' \Longrightarrow \sqrt{x+a} \leq \sqrt{x'+a}$

Alors : $x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$ donc f est strictement croissant sur D_f

Tableau de variation :

x	$-a$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

La courbe de la fonction f :