

## TD-Géométrie analytique de l'espace

### EXERCICES D'APPLICATIONS

### AVEC SOLUTIONS

**Exercice1:** Soient  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base de  $V_3$

$$\vec{u}(1; -1; 2) \text{ et } \vec{v}(-2; 2; -4) \text{ et } \vec{w}(1; 1; 2)$$

1)étudier la colinéarité des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

2)étudier la colinéarité des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$

**Solution1 :1)**  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$   $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$

et  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$  Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont

colinéaires

2)  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$

Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  sont non colinéaires

**Exercice2 :** Soit l'espace  $(\mathcal{E})$  muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ; et considérons les points

$$A(1; 2; 1) \text{ et } B(2; 1; 3) \text{ et } C(-1; 4; -3) \text{ et } D(2; 3; 3)$$

1. étudier l'alignement des points  $A, B$  et  $C$

2. étudier l'alignement des points  $A, B$  et  $D$

**Solution2 :1)**  $\overrightarrow{AB}(2-1; 1-2; 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AC}(-1-1; 4-2; -3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(-2; 2; -4)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Donc  $A, B$  et  $C$  sont alignés

2)  $\overrightarrow{AB}(2-1; 1-2; 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AD}(2-1; 3-2; 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(1; 1; 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \text{ Donc } A, B \text{ et } D \text{ ne sont pas}$$

alignés

**Exercice :** Soit l'espace  $(\mathcal{E})$  muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ; et considérons les points

$$A(1, -2, 1); B(-1, 0, 1); C(0, 1, 0) \text{ et } E(7, 6, 1)$$

1. Vérifier que les points  $A, B$  et  $C$  sont non alignés

Que pouvez-vous dire des points  $A, B$  et  $E$ .

2. Déterminer le point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

3. Déterminer le centre de ce parallélogramme.

**Exercice3:**  $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  une base et Soient

$$\vec{u}(2; -4; 3) \text{ et } \vec{v}(-1; 1; 2) \text{ et } \vec{w}(3; 1; -1)$$

Trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ?

**Solution3 :**

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 2(-1-2) + 4(-1-6) + 3(-1-3) = -38 \neq 0$$

Donc les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont non coplanaires

**Exercice4 :** Considérons les vecteurs

$$\vec{u}(2m+1; 3; 2-m) \text{ et } \vec{v}(-1; 2; 3) \text{ et } \vec{w}(-3; 1; 2)$$

déterminer le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient coplanaires.

**Solution4:**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ssi

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2m+1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-m & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2m+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (2-m) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ssi } 1(2m+1) - 21 + 5(2-m) = 0 \Leftrightarrow -3m = 10 \Leftrightarrow m = -\frac{10}{3}$$

**Exercice5 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

**Exercice5 :** On calcul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

On a :  $\Delta \neq 0$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-25}{-15} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{2}{15}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-12}{-15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left( \frac{5}{3}; -\frac{2}{15}; \frac{4}{5} \right) \right\}$$

**Exercice6 :** soit la droite (D)

$$\text{de représentation } \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -k \\ z = 4 + 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) :$$

1) Est ce que B ( 3 ; 2 ; 5 ) appartient à (D) ?

2) déterminer un point de la droite (D) et un vecteur directeur de (D)

**Solution 6:** 1) B ( 3 ; 2 ; 5 ) appartient à (D) si et seulement si il existe k tel que :

$$\begin{cases} 3 = -3 + 2k \\ 2 = -k \\ 5 = 4 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -2 \\ k = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ce qui est impossible donc B n'appartient pas à (D).

2) la droite (D) passe par le point A(-3;0;4)

et  $\vec{u}(2;-1;4)$  est un vecteur directeur de (D)

**Exercice7 :** soient les points A(-1;1;0)

et B(2;-1;1) et C(0;-1;2)

1) Déterminer deux équations cartésiennes de la droite(AB)

2) Est-ce que point C(0;-1;2)  $\in$  (AB) ?

**Solution7 :**  $\overline{AB}(3;-2;1)$

Donc :  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$  les deux équations

cartésiennes de la droite(AB)

On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite(AB)

Et puisque :  $\frac{0+1}{3} \neq \frac{-1-1}{-2}$  donc C  $\notin$  (AB)

**Exercice8 :** soit la droite (D) définie par les

deux équations cartésiennes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$$

1) déterminer un point et un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite (D)

2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

**Solution8 :** 1)  $\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4} \Leftrightarrow$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-2}$$

(D) la droite passant par le point A  $\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{4}\right)$  et

de vecteur directeur  $\vec{u}(6;8;-2)$

2) une représentation est :  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 6k \\ y = -1 + 8k \\ z = \frac{3}{4} - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) :$

**Exercice9 :** déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points :

A(2;-1;-3) et B(0;1;4) et C(-3;0;0)

**Solution9 :** ABC est le plan passant par A(2;-1;-3) et  $\overline{AB}(-2;2;7)$  et  $\overline{AC}(-5;1;3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan

$$ABC \text{ est : } \begin{cases} x = 2 - 2t - 5t' \\ y = -1 + 4t + t' \\ z = -3 + 7t + 3t' \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (t' \in \mathbb{R})$$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC)

**Exercice10 :** déterminer les coordonnées d'un point du plan  $(P)$  ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant définit par une représentation paramétrique :

$$(P) \begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + t - s \\ z = 5t - 5s \end{cases}$$

**Solution10 :**

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + t - s \\ z = 5t - 5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + 1t - 1s \\ z = 0 + 5t - 5s \end{cases}$$

vous pouvez alors en déduire que c'est un plan passant par le point

A et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Exercice11 :** Déterminer l'équation cartésienne du plan  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  qui passe par  $A(1; -3; 1)$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}(-2; 4; 1)$  et  $\vec{v}(-1; 0; 2)$

**Solution11 :**  $M(x; y; z) \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x-1) + 3(y+3) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 3y + 9 + 4z - 4 = 0$$

$$(P): 8x + 3y + 4z - 3 = 0$$

**Exercice12 :** Soient les droites  $(D_1)$  et  $(\Delta_1)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_1) \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 2 - 2k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + k \end{cases} \quad (\Delta_1) \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

**Solution12 :** on a :  $\vec{u}(1; -2; 1)$  un vecteur directeur de  $(D_1)$  et  $\vec{v}(-1; 2; 1)$  un vecteur directeur de  $(\Delta_1)$

et puisque :  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$  les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont

non colinéaires donc les droites  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2 + k = -1 - t \\ 2 - 2k = 2t \\ 4 + k = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + k = 1 \\ t + k = 1 \\ t - k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + k = 1 \\ t - k = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 4 \\ t - k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = -1 \end{cases} \text{ On remplaçant } t = 2 \text{ dans}$$

l'équation paramétriques de  $(\Delta_1)$  On trouve :

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \text{ Donc les droites } (\Delta_1) \text{ et } (D_1) \text{ se coupent}$$

en  $E(-3; 4; 3)$

**Exercice13 :** Soient les droites  $(D_2)$  et  $(\Delta_2)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_2) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 3k \end{cases} \quad (\Delta_2) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Etudier la position relative de  $(D_2)$  et  $(\Delta_2)$

**Solution13 :** on a  $\vec{u}(1; -1; 3)$  un vecteur directeur de  $(D_2)$  et  $\vec{v}(2; -1; 1)$  un vecteur directeur de  $(\Delta_2)$

et puisque :  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$  les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont

non colinéaires donc les droites  $(D_2)$  et  $(\Delta_2)$  sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + k = 2t \\ -2 - k = 1 - t \\ 2 + 3k = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2t = -1 \\ k - t = -3 \\ 3k - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2t = -1 \\ k - t = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ t = -2 \end{cases} \text{ mais le couple } (k; t) = (-5; -2) \text{ ne}$$

vérifie pas l'équation  $3k - t = 1$

Car :  $3(-5) - (-2) = -13 \neq 1$

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$  sont non coplanaires

**Methode2 :** on a  $(D_2)$  passe par  $A(1; -2; 2)$  et de vecteur directeur de  $\vec{u}(1; -1; 3)$

et :  $(\Delta_2)$  passe par  $B(0; 1; 3)$  et de vecteur directeur de

$\vec{AB}(-1; 3; 1)$  on va voir si les Les vecteurs  $\vec{u}(1; -1; 3)$  et  $\vec{v}(2; -1; 1)$  et  $\vec{AB}(-1; 3; 1)$  sont coplanaires ??

$$\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 14 \neq 0$  Donc les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

et  $\vec{AB}$  sont non coplanaires

Donc les droites  $(\Delta_1)$  et  $(D_1)$  sont non coplanaires

**Exercice14 :** Soient les droites  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 \\ z = 2 - 1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_3) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$

**Solution14 :** on a  $(D_3)$  passe par  $A(1; -2; 2)$

et de vecteur directeur de  $\vec{u}(1; 0; -1)$

et :  $(\Delta_3)$  passe par  $B(0; 1; 3)$  et de vecteur

directeur de  $\vec{v}(2; 0; -2)$

on peut voir que les Les vecteurs  $\vec{u}(1; 0; -1)$

et  $\vec{v}(2; 0; -2)$  sont colinéaires

Car :  $\vec{v} = 2\vec{u}$  Donc les droites  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$  sont parallèles

On remarque aussi que :  $A \notin (\Delta_3)$

$$\text{car } \begin{cases} 1 = 2t \\ -2 = 1 \\ 2 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = t \\ -\frac{1}{2} = t \\ 2 = 3 - 2t \end{cases}$$

Donc les droites  $(D_3)$  et  $(\Delta_3)$  sont strictement parallèles

**Exercice15 :** L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

Soient les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$  de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x = k - 3 \\ y = -k + 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D_4) \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de  $(D_3)$  et  $(D_4)$

**Solution15 :** on a  $(D_3)$  passe par  $A(-3; 3; 2)$  et de vecteur directeur de  $\vec{u}(1; -1; 0)$

et  $(D_4)$  passe par  $B(1; -1; 2)$  et de vecteur directeur de  $\vec{v}(-2; 2; 0)$

on peut voir que les Les vecteurs  $\vec{u}(1; -1; 0)$

et  $\vec{v}(-2; 2; 0)$  sont colinéaires

Car :  $\vec{v} = -2\vec{u}$  Donc les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$

Sont parallèles

On remarque aussi que :

$$A \in (D_4) \text{ car } \begin{cases} -3 = -2t + 1 \\ 3 = 2t - 1 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t \\ 2 = t \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Donc les droites  $(D_3)$  et  $(D_4)$  sont confondues

**Exercice16 :** Soient les droites  $(D)$  et  $(D')$  de représentations paramétriques respectives :

$$(D) \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D') \begin{cases} x = 2 + 6k' \\ y = -3 - 12k' \\ z = 4 + 3k' \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de  $(D)$  et  $(D')$

**Solution16 :**

$M(x; y; z)$  appartient à  $(D)$  et  $(D')$  si et seulement si il existe  $k$  et  $k'$  réels tels que :

$$\begin{cases} k = 2 + 6k' \\ 1 - k = -3 - 12k' \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 6k' \\ 1 - 2 - 6k' = -3 - 12k' \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k' = -\frac{1}{3} \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases}$$

Cette dernière égalité sert à vérifier notre résultat :

$$3 - 2k = 3 - 0 = 3 \quad \text{et} \quad 4 + 3k' = 4 - 1 = 3.$$

$k = 0$  et  $k' = -\frac{1}{3}$  donc  $(D)$  et  $(D')$  possèdent un unique point commun  $C$

Dont les coordonnées peuvent être calculées à l'aide de  $k$  ou  $k'$  :  $C(0; 1; 3)$

(D) et (D') sont alors contenues dans le plan (P) passant par C et de vecteurs directeurs  $\vec{u}(1;-1;-2)$  et  $\vec{v}(6;-12;3)$

**Exercice17 :** Soient la droite  $(D_1)$  de

$$\text{représentations paramétrique } (D_1) \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

et le plan  $(P_1)$  d'équation cartésienne:

$$(P_1): 3x + 2y + z + 1 = 0$$

Etudier la position relative de  $(D_1)$  et  $(P_1)$

**Solution17 :**

on a  $(D_1)$  est de vecteur directeur  $\vec{u}(-4;2;3)$

Et on a :  $3(-4) + 2 \times 2 + 3 \neq 0$

donc  $(D_1)$  coupe  $(P_1)$  en un point unique

on a  $M(x;y;z) \in (D_1) \cap (P_1) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} /$

$$\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ 3(-4t + 2) + 2(2t - 1) + 3t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ donc } (D_1) \text{ coupe } (P_1)$$

au point  $A(-2;1;3)$

**Exercice18 :** Soient la droite  $(D_2)$  de représentations paramétrique

$$(D_2) \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

et le plan  $(P_2)$  d'équation cartésienne:

$$(P_2): x + 3y + z + 4 = 0$$

Etudier la position relative de  $(D_2)$  et  $(P_2)$

**Solution18 :** on a  $(D_2)$  est de vecteur directeur

$\vec{u}(5;-2;1)$  et on a :  $5 + 3(-2) + 1 = 0$

donc  $(D_2)$  est parallèle à  $(P_2)$

on va déterminer l'intersection de  $(D_2)$  et  $(P_2)$

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\text{on a } M(x;y;z) \in (D_2) \cap (P_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ x + 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ (-4 + 5t) + 3(-1 - 2t) + (-3 + t) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ -6 = 0 \end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solutions

donc  $(D_2)$  ne coupe pas le plan  $(P_2)$

Donc  $(D_2)$  strictement parallèles à  $(P_2)$

**Exercice19 :**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient deux plans  $(P)$  et  $(P')$  d'équations cartésiennes:

$$(P): 2x + y - z + 2 = 0 \text{ et } (P'): 3x + y + 4z - 1 = 0$$

Etudier la position relative de  $(P)$  et  $(P')$

**Solution19 :** on a :  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$  donc  $(P)$  et

$(P')$  se coupent suivant une droite  $(D)$

Déterminons une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  intersection de  $(P)$  et  $(P')$

$(D)$  a pour système d'équations cartésiennes :

$$M(x;y;z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 \\ 3x + y = -4z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = -5z - 8 \end{cases} \text{ et on pose } (z = t)$$

$$\text{Donc : } (D) \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -8 - 5t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$(D)$  est la droite qui passe par le point

$A(-3;-8;0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(3;-5;1)$

**Exercice20 :**

L'espace est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient deux plans  $(Q)$  et  $(Q')$  d'équations cartésiennes:

$$(Q): (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + z - \sqrt{2} = 0 \text{ et}$$

$$(Q'): (\sqrt{2} - 2)x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$$

Etudier la position relative de (Q) et (Q')

**Solution20** : on a :  $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-2 & -1 \end{vmatrix} = 0$  et

$$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

donc (Q) // (Q')

et puisque :  $-\sqrt{2} \neq -2$

(Q) et (Q') sont strictement parallèles

**Exercice21** : Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$$(P): x - y - 3z - 2 = 0 \quad (Q): 2x + y + z - 1 = 0$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).

**Solution21** : (D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre, par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x = y + 3z + 2 \\ 2(y + 3z + 2) + y + z - 1 = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3z + 2 \\ 3y + 7z + 3 = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{7}{3}z + 3z + 2 \\ y = -1 - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}z \\ y = -1 - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est

$$\text{donc : } (D) \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}k \\ y = -1 - \frac{7}{3}k \\ z = 0 + 1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(D) passe donc par le point A ( 1 ; -1 ; 0 ) et a pour vecteur directeur  $\vec{u} \left( \frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; 1 \right)$

