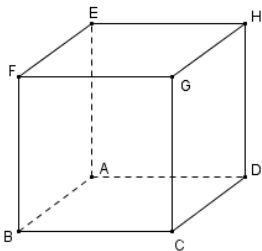


VECTEURS DE L'ESPACE

Exercice01 :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier :

$$\vec{t} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{FH}$$

Solution :

$$\text{On a : } \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\vec{t} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{FH} = \vec{AB} + (\vec{DA} + \vec{AE}) + \vec{FH}$$

(Relation de Chasles)

$$\vec{t} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FH} = \vec{DB} + \vec{AE} + \vec{BD} \text{ Car }$$

$\vec{FH} = \vec{BD}$ (FHDB est un parallélogramme)

$$\vec{t} = \vec{BD} + \vec{DB} + \vec{AE} = \vec{BB} + \vec{AE} = \vec{0} + \vec{AE} = \vec{AE}$$

Exercice02:

ABCDEFGH un cube et K milieu du segment [EF] et L milieu du segment [CF] et M un

point du segment [CD] tel que : $\vec{CM} = \frac{1}{4}\vec{CD}$

Montrer que : $(ML) \parallel (DK)$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles

On a : $\vec{ML} = \vec{CL} - \vec{CM}$ et puisque : L milieu du

segment [CF] Alors : $\vec{CL} = \frac{1}{2}\vec{CF}$

$$\text{donc : } \vec{ML} = \frac{1}{2}\left(\vec{CF} - \frac{1}{2}\vec{CD}\right) \quad (1)$$

D'autre part On a : $\vec{CK} = \vec{CF} + \vec{FK}$ et

$$\vec{DK} = \vec{CK} - \vec{CD} \text{ Donc : } \vec{DK} = \vec{CF} + \vec{FK} - \vec{CD}$$

et puisque : K milieu du segment [EF]

$$\text{Alors : } \vec{FK} = \frac{1}{2}\vec{FE} \text{ donc : } \vec{FK} = \frac{1}{2}\vec{CD} \text{ (car : } \vec{FE} = \vec{CD})$$

$$\text{Donc : } \vec{DK} = \vec{CF} + \frac{1}{2}\vec{CD} - \vec{CD} = \vec{CF} - \frac{1}{2}\vec{CD} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \vec{ML} = \frac{1}{2}\vec{DK}$$

donc $\vec{DK}$ et $\vec{ML}$ sont colinéaires

Donc : $(ML) \parallel (DK)$

Exercice03: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels x et y tels que :

$$x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v}$$

$$\textbf{Solution : } x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$(x + y - 2)\vec{u} + (2x + 3y - 5)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Exercice04 :

ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment [AD]

on pose $\vec{EG} = \vec{u}$ $\vec{FC} = \vec{v}$ et $\vec{IO} = \vec{w}$

Montrer que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Solution : On a : $\vec{EG} = \vec{u}$ et on a $\vec{EG} = \vec{AC}$

donc $\vec{AC} = \vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment [AD]

et O milieu du segment [FD]

$$\text{on trouve : } \vec{IO} = \frac{1}{2}\vec{AF} \text{ Donc : } \vec{IO} = \vec{AK}$$

et puisque : K milieu du segment [AF]

cad $\vec{AK} = \vec{w}$

et On considérons le point L tel que AFCL est

un parallélogramme on trouve : $\vec{v} = \vec{AL}$

Alors : $\vec{AC} = \vec{u}$ et $\vec{v} = \vec{AL}$ et $\vec{AK} = \vec{w}$

Donc : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exercice05 : ABCDEFGH un cube

M milieu du segment [HE] et N milieu du

segment [HG]

Les vecteurs $\vec{MN}$, $\vec{CH}$ et $\vec{AC}$ sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et

puisque : M milieu du segment [HE] N milieu

du segment [HG] on trouve : $\vec{EG} = 2\vec{MN}$

et puisque $\vec{EG} = \vec{AC}$: alors $\vec{AC} = 2\vec{MN}$ donc

Les vecteurs $\vec{MN}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et par

suite Les vecteurs $\vec{MN}$, $\vec{CH}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires

Exercice06 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$

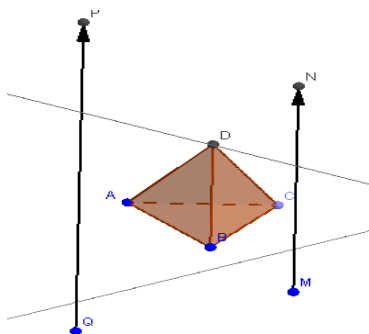
1) Tracer une figure

2) Ecrire $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

3) En déduire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4) Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution :1)



$$2) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{PQ} = -3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = -3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = -3\overrightarrow{BD}$$

$$3) \text{ on a } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \text{ ①}$$

$$\text{on a } \overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on trouve : } \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ donc } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$$

donc : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4) on a $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice07 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Montrer que $(LD) \parallel (EK)$

Solution : pour montrer que $(LD) \parallel (EK)$ il suffit

de montrer que : $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires ??

$$\text{On a : } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ on utilisant la Relation de}$$

Chasles

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et}$$

$$\text{puisque : } \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ ①}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{et puisque : } \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on déduit que : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$$

donc : $(LD) \parallel (EK)$

Exercice08 : $ABCDEFGH$ un cube

K est le symétrique du point D par rapport à H

Montrer que $(AK) \parallel (BCG)$

$$\text{Solution : on a : } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$$

donc : Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires

$$\text{on déduit que : } \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$$

donc : $(AK) \parallel (BCG)$