

TD : LA DERIVATION

Exercice1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 3$. Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 3 + 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-1) = -3 = f'(-2) \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -2 et $f'(-2) = -3$

Exercice2 : Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

$$\begin{aligned} \text{Solution : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 + 1 + h - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 3h + 1 + h - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 3h + 4) = 4 = f'(1) \end{aligned}$$

Exercice3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; & x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; & x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Que peut-on conclure ?

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x + 3) = 3 = f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 1) = 1 = f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice4 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \dots x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} \dots x < 1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

Solution : on a $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{4}(x+1)}{4} = \frac{1}{2} = f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1) = f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

Exercice5 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - |x|$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1 = f'_d(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + x; & x < 0 \\ f(x) = -2x^2 + 3x; & x \geq 0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en $a = -2$.

2- f est-elle dérivable en 0.

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1 .

3- f est-elle dérivable en -1 .

Exercice8 Déterminer une fonction affine

tangente en -3 de la fonction $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Exercice9 : donner une approximation de $\sin 3$

Solution : Si on veut une approximation de $\sin 3$, on peut prendre : $f(x) = \sin x$ et $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir $3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = \sin \pi = 0$ et $f'(a) = \cos \pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :

$$\sin 3 = \sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3.$$

Exercice10 : soit f une fonction définie sur

$$]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}} \dots \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) étudier la dérivabilité de f en 0

2) Donner une valeur approchée

du nombre : $f(10^{-5})$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\tan \frac{x}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = 2 \times 1 = 2$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

2) on a $f(a + h) \sim f'(a)h + f(a)$

Donc $f(0 + 10^{-5}) \sim f(0) + 10^{-5} f'(0)$ $a = 0$ et $h = 10^{-5}$

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 2$$

$$\text{Donc } f(10^{-5}) \sim 2 \times 10^{-5}$$

Exercice11 : Déterminer l'équation de la tangente

à la courbe de la fonction $f(x) = \sin x$

en $A(0, f(0))$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f'(0)$$

Donc f est dérivable en 0

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

L'équation de la tangente à la courbe

en $A(0, f(0))$ est : $(T): y = x$

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \dots 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt{x^3 - x} \dots x > 1 \end{cases}$$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ et

donner une interprétation géométrique du résultat

3) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche

en $x_0 = 1$ et donner une interprétation

géométrique

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0$ et $0 \leq x \leq 1$

ou $x^3 - x \geq 0$ et $x > 1$

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } x > 1$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \in [0; +\infty[\text{ donc : } D_f = [0; +\infty[$$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0 = 0$

$$\text{On a : } f(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2} - 1}{x} = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} - 1}{x} \\ &= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{x(\sqrt{1-x^2} + 1)} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en 0

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en

$A(0, 1)$. de coefficient directeur $1 = f'_d(0)$

3) a) étudier de la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ On a : $f(1) = 0$ soit $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x - 1} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x)^2 = -4$$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 1$

b) soit $x > 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^3 - x} - 0}{x-1} = \frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3 - x}} = \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 - x}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^3 - x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x = 2$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 - x}} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en $A(1,0)$ parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le haut

Exercice13 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de f à gauche en

$x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$

4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$

Solution :1) $f(x) = |x^2 - 1|$

étude du signe de : $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases} \quad \text{et}$$

$$f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = 2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à droite en $A(1, 0)$. de coefficient directeur $f'_d(1) = 2$

2)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ et $f'_g(1) = -2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à gauche en $A(1, 0)$. de coefficient directeur $f'_g(1) = -2$

3) f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car : $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(1, 0)$.

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0 = 1$ est :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(1) + f'_g(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 0 - 2(x-1) \Leftrightarrow (\Delta_g): y = -2x + 2$$

Exercice13 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + x.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Solution :

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 + x+h - 2x^2 - x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + x+h - 2x^2 - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x + 2h + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4x + 2h + 1 = 4x + 1 = f'(x)$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$

S'appelle la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et se note par f' .

Exercice14 :1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $\sin$ sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \text{ et sur } \mathbb{R}^{*-}$$

Exercice15 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x) = 11$

2) $f(x) = 7x + 15$ 3) $f(x) = x^3$ 4) $f(x) = \sin(5x - 1)$

Solution : 1) $f'(x) = (11)' = 0$ 2) $f'(x) = (7x + 15)' = 7$

3) $f'(x) = (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$

4) $f'(x) = (\sin(5x - 1))' = (5x - 1)' \cos(5x - 1) = 5 \cos(5x - 1)$

Exercice16 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x) = x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

Solution :

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = (x^2)' + (7x)' + (15)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = \left(x^2 + 7x + 15 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = 2x + 7 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice17 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x) = (5x^2 + 1)(3x - 1)$

Solution : On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((5x^2 + 1)(3x - 1))' = (5x^2 + 1)' \times (3x - 1) + (5x^2 + 1) \times (3x - 1)'$$

$$f'(x) = 10x \times (3x - 1) + 3(5x^2 + 1) = 30x^2 - 10x + 15x^2 + 3$$

$$f'(x) = 45x^2 - 10x + 3$$

Exercice18 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = (3x + 4)^3$

Solution : On utilise la formule : $(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$

$$f'(x) = ((3x + 4)^3)' = 3 \times (3x + 4)^{3-1} \times (3x + 4)' = 3 \times 3 \times (3x + 4)^2 = 9(3x + 4)^2$$

Exercice19 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

Exercice20 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x - 1}{x + 2}\right)' = \frac{(3x - 1)'(x + 2) - (3x - 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2} = \frac{3(x + 2) - 1 \times (3x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{7}{(x + 2)^2}$$

Exercice21 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$

Solution : On utilise la formule : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

Exercice22 : Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a : $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{0; 1\}$

$$\forall x \in D_f - \{0; 1\} : f'(x) = (\sqrt{x^2 - x})' = \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Exercice23 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ 2) $f(x) = \frac{3}{x}$

3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$ 4) $f(x) = \cos 2x + 3\sin 3x$

5) $f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1)$ 6) $f(x) = \frac{1}{5x + 7}$ 7) $f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1}$

Solutions :

1) $f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1$

2) $f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$

3) $f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f'(x) = (\cos 2x + 3\sin 3x)' = -2\sin 2x + 3 \times 3\cos 3x = -2\sin 2x + 9\cos 3x$

5) $f(x) = (3x^2 + 2)(7x + 1)$

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((3x^2 + 2)(7x + 1))' = (3x^2 + 2)' \times (7x + 1) + (3x^2 + 2) \times (7x + 1)'$$

$$f'(x) = 6x \times (7x + 1) + 7(3x^2 + 2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$$

7) $f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3+1} \right)' = \frac{(7x)'(x^3+1) - 7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{7(x^3+1) - 7x \times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3+1)^2}$$

Exercice24 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f(x) = -2x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 1$

2. $f(x) = (3x^2 + 1)(2x + 3)$

3. $f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$ 4. $f(x) = \frac{3x^2 + x}{5x^2 + 1}$

5. $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x^2 + 1}$ 6. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x + 1}$

Exercice25 : déterminer $f'(x)$ dans les cas

suivants : 1) $f(x) = 9x + 2$ 2) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

3) $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 4) $f(x) = \frac{5x + 2}{3x - 1}$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 6) $f(x) = \frac{1}{(2x + 1)^5}$

7) $f(x) = (5x^3 - 3)^4$ 8) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 4}$

9) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ 10) $f(x) = x + \frac{x^2}{x - 1}$

11) $f(x) = \sqrt{\frac{2x + 1}{x - 3}}$ 12) $f(x) = x \cos x$

13) $f(x) = \tan^2 x$ 14) $f(x) = \cos x \times \sin x$

15) $f(x) = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ 16) $f(x) = \frac{(1 + 2x + x^2)^5}{4}$

17) $f(x) = 1 + x + \frac{x - 1}{\sqrt{2 + x^2}}$ 18) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$

Exercice 26: Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 2) $f(x) = 4 \sin x$

3) $f(x) = x^4 \cos x$ 4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$

7) $f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1}$ 8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

9) $f(x) = (2x + 3)^5$

Solution : 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2)' + (3x - 1)' = 2x + 3$$

2) $f(x) = 4 \sin x$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 4u(x) \text{ avec } u(x) = \sin x$$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4(u(x))' = 4 \cos x$$

3) $f(x) = x^4 \cos x$ $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = u(x) \times v(x) \text{ avec } u(x) = x^4 \text{ et } v(x) = \cos x$$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((x^4) \times (\cos x))' = (x^4)' \times (\cos x) + (x^4) \times (\cos x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \times (\cos x) - x^4 \times \sin x = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$$

4) $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ $D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ avec } u(x) = \sqrt{x} \text{ et } v(x) = x^3$$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = (u(x))' + (v(x))' = \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3x^2$$

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f = \mathbb{R}^{++} =]0; +\infty[$

On a : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = \sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

6) $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 3x - 1}$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{4} \right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -1; \frac{1}{4} \right\}$

est on a : $f(x) = \frac{6}{u(x)}$ avec $u(x) = 4x^2 + 3x - 1$

$$f'(x) = 6 \left(\frac{1}{u(x)} \right)' = 6 \left(-\frac{u'}{u^2} \right) = -6 \frac{(4x^2 + 3x - 1)'}{(4x^2 + 3x - 1)^2} = -6 \frac{8x + 3}{(4x^2 + 3x - 1)^2}$$

$$7) f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

$$f(x) = u(x)/v(x) \text{ avec } u(x) = 4x-3 \text{ et } v(x) = 2x-1$$

$$\text{On utilise la formule : } \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)'}{(2x-1)} = \frac{(4x-3)'(2x-1) - (4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$8) f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad : D_f =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{On a : } f(x) = \sqrt{u(x)} \text{ avec } u(x) = x^2 - 4$$

$$\text{Et on a : } u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{-2; 2\}$$

Donc f est dérivable sur $D_f - \{-2; 2\}$

$$\forall x \in D_f - \{-2; 2\} : f'(x) = (\sqrt{x^2 - 4})' = \frac{(x^2 - 4)'}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$9) f(x) = (2x+3)^5 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (u(x))^5 \text{ avec } u(x) = 2x+3$$

$$\text{On utilise la formule : } (u^n)' = nu^{n-1} \times u'$$

$$f'(x) = ((2x+3)^5)' = 5 \times (2x+3)^{5-1} \times (2x+3)' = 5 \times 2 \times (2x+3)^4$$

$$f'(x) = 10(2x+3)^4$$

Exercice 27 : soit f une fonction définie sur

$$I =]-\pi; \pi[\text{ par : } \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\cos x - 1}{\sin x}; \text{ si } 0 < x < \pi \\ f(x) = \frac{x|x+1|}{x-1}; \text{ si } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

1) montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$

et donner l'équation de la tangente à la courbe de f en $x_0 = 0$

2) a) étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$

b) donner les équations des demi-tangentes à la courbe de f en $x_0 = -1$

Solution : 1) étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\cos x - 1}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2 \times \frac{1}{2} \times 1 = -1 = f'_d(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x-1} = -1 = f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = 0$ et

$$f'_g(0) = -1$$

Et puisque : $f'_d(0) = f'_g(0)$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangente en $O(0, 0)$ de coefficient directeur $f'(0) = -1$

l'équation de la tangente à la courbe de f en

$$x_0 = 0 \text{ est : } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow (T) : y = -x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f'_d(-1)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0 = -1$ et $f'_d(-1) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x-1} = -\frac{1}{2} = f'_g(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et

$$f'_g(-1) = -\frac{1}{2} \text{ mais on a : } f'_d(-1) \neq f'_g(-1)$$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en $A(-1, 0)$.

b) l'équation de la demi-tangente à droite à la courbe de f en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_d(-1)(x + 1) \text{ avec } x \geq -1$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}(x + 1) \Leftrightarrow (T_d) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ avec } x \geq -1$$

l'équation de la demi-tangente à gauche à la courbe de f en $x_0 = -1$ est :

$$y = f(-1) + f'_g(-1)(x + 1) \text{ avec } x \leq -1$$

$$y = 0 - \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow (T_g): y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{avec } x \leq -1$$

Exercice 28 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{3x-2} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3$$

1) déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow 3x-2 \geq 0$ et $x-1 \neq 0$

$$\text{Donc : } D_f = \left[\frac{2}{3}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$$

2) on a $f(x) = g(3x-2) \times h(x)$

$$\text{Avec : } h(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme $D_f: x \rightarrow 3x-2$ est dérivable sur D_f

$$3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3} \quad \text{donc la fonction } x \rightarrow g(3x-2)$$

est dérivable sur $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ cad $D_{f'} = D_f - \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

$\forall x \in D_{f'} :$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g(3x-2))' \times h(x) + g(3x-2) \times (h(x))' \\ (g(3x-2))' &= (3x-2)' \times g'(3x-2) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \end{aligned}$$

$$\text{Car : } g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(h(x))' = 3 \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' \times \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \times \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^3 + \sqrt{3x-2} \times \frac{-9}{(x-1)^2} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^2$$

Exercice 29 : en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Solution: 1) on pose : $f(x) = (x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$$f(-1) = (-1+2)^{2018} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

$$\text{Et puisque : } f'(x) = 2018(x+2)^{2017} (x+2)' = 2018(x+2)^{2017}$$

$$\text{Donc : } f'(-1) = 2018 \times 1^{2017} = 2018$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+2)^{2018} - 1}{x+1} = 2018$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} \quad \text{on pose } f(x) = 2 \sin x$$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en

$$\frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \left(\frac{\pi}{6}\right)} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Et puisque : } f'(x) = 2 \cos x$$

$$\text{Donc : } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien

