

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

1 Définition de suites

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, on demande de calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_6 .

1. $u_n = \frac{7n - 2}{n + 4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. u_n est la somme des n premiers nombres pairs strictement positifs.
5. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n .
6. Je place 1 000 Dh sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
 u_n est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre π .

2 Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \frac{n + 1}{n + 2}$.
4. $u_n = \frac{3^n}{2}$.
5. $u_n = \sqrt{n^2 + 3}$.
6. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
7. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$.
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. (plus difficile)

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

3 Majoration, minoration

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 5 - \frac{1}{n}$.
Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
 - (b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = -n^2 + 8n + 1$.
Montrer que (u_n) est majorée par 17.
4. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

4 Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{3}$.
Calculer le 9^{ième} terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2 .
Calculer u_{15} , puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \dots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \dots + 170 + 173$.

5 Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{7^{n+1}}{5}$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \frac{1}{81}$ et de raison -3 .
Calculer u_7 , puis $S = u_1 + u_2 + \dots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 4\,096$.

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

Les exercices qui suivent sont des extraits d'annales de bac. Il est assez fréquent d'avoir des suites le jour du bac et une grande partie de leur étude a été faite en première, vous êtes donc déjà très forts.

6 Suite "arithmético-géométrique"

Exercice très classique que vous avez de fortes chances de retrouver dans l'année.

On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geq 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 6$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \dots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

7 Augmentation de loyer

Une personne loue une maison à partir du premier janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 dh et le locataire s'engage à occuper la maison pendant 9 années complètes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

1. **Contrat n°1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
 - (a) Calculer le loyer u_1 payé lors de la deuxième année.
 - (b) Exprimer u_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n .
 - (c) Calculer u_8 .
 - (d) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
2. **Contrat n°2 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 dh du loyer de l'année précédente.
 - (a) Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.
 - (b) Exprimer v_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n .
 - (c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

8 Suites et représentation graphique

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 5 cm, tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \frac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3 .
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
 - (a) Calculer s_0, s_1, s_2 et s_3 . À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
 - (b) On admet que la suite (s_n) est une suite constante égale à 2. (la démonstration n'est pas du programme de première)
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.
 - (a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique.
 - (b) Donner l'expression de d_n en fonction de n .
5. En utilisant les questions 3.(b) et 4.(b), donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .