

**TD LIMITE D'UNE FONCTION**  
**EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS**

PROF: ATMANI NAJIB

1BAC BIOF

## LIMITE D'UNE FONCTION

**Exercice1 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Solution :** on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

**Exercice2 :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si :  $x > 1$  :  $f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

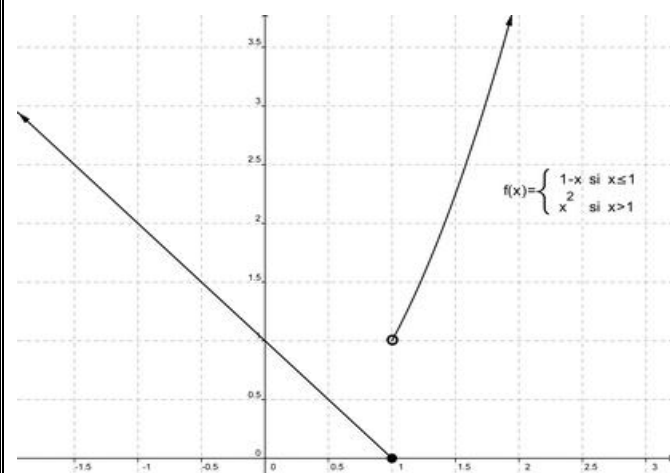
Donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si :  $x < 1$  :  $f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

**Exercice3 :**



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Prof/ATMANI NAJIB

$x \mapsto 1 - x$  si  $x \leq 1$

$x \mapsto x^2$  si  $x > 1$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 1.

**Exercice4 :** Soit la fonction  $g$  définie par :

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - x + 3$  si  $x \geq 1$

$x \mapsto -x^2 + x + \alpha$  si  $x < 1$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admet une limite en 1.

**Exercice5 :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :** Déterminons  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ?

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si :  $-1 < x < 1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si :  $x < -1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

**Exercice6 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

**Solution :** on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( 1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

**Exercice7** : déterminer : 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

**Solution** : 1) on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = 2$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$

2) on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$

et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$  Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$

**Exercice8** : calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

**Solution** : on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$  on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x-2 = 0^+$

|           |           |      |     |           |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x^2+x-2$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       |

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

**Exercice9** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$  4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

**Solution** : 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^4 = -\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

**Exercice10** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$  2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$  3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

**Solution** : 1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$  directement on trouve une

forme indéterminée :  $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cosh}{\frac{h^2}{2}} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$

(On pose  $\sqrt{x} = h$ )

3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

On montre que :  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

On pose  $x - \frac{\pi}{6} = h$  ) donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Donc :  $= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$

**Exercice11** : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

**Solution :** 1) on pose :  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq 1 \text{ donc : } |f(x)| \leq x^2 \text{ et on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3} ? \text{ on pose : } f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* |\cos x| \leq 1 \text{ donc : } |f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3} \text{ et on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0 \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)} ? \text{ on pose : } f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ donc :}$$

$$0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2 \text{ donc } 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \text{ Alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} ? \text{ on pose : } f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4} \text{ cad } 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2} \text{ donc : } |f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

**Exercice 12 :** Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

$$1) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$2) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

$$3) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Solution :**

$$1) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ et } f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1=5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x=-10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet 2) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$4) k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ donc : } D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

|          |           |   |   |           |   |
|----------|-----------|---|---|-----------|---|
| $x$      | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ |   |
| $x(x-2)$ | +         | 0 | - | 0         | + |

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} -3x + 1 = -5$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

**Exercice 13** : calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10}$  2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$  4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

**Solution** : 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} - 2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 10 = 0$

on trouve une forme indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{(x^2 + 3x - 10)(\sqrt{2x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 4)}{(\sqrt{2x} + 2)} \times \frac{1}{(x - 2)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x} + 2)} \times \frac{1}{(x + 5)} = \frac{2}{14} \end{aligned}$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1}$  ?

On a :  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Et  $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 1)$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + 5x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}$$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$  ?

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une forme indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

On pose  $x - \frac{\pi}{4} = h$  donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \left( h + \frac{\pi}{4} \right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan \left( h + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

**Exercice 14** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left( \frac{2}{x} \right) = 0$

**Solution** : 1) on a  $\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \cos \left( \frac{2}{x} \right) \right| \leq 1$

donc  $\left| x^2 \cos \left( \frac{2}{x} \right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left( \frac{2}{x} \right) = 0$

**Exercice 15** : monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) = 2$

**Solution** :  $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$  donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

**Exercice 16** : a) monter que :  $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3} |x - 4|$

b) monter que :  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 1} = 3$

**Solution :**  $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$|f(x) - 3| = |\sqrt{2x+1} - 3| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$$

et on a  $\sqrt{2x+1}+3 \geq 3$  donc :  $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

**Exercice17 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$  et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$  donc  $\left| \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$  donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**Exercice18:** Soit la fonction :  $f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  et  $x^2 + x^4 \geq 0$

donc  $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$  et puisque :

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 - x^4 = 0$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Exercice19 :** Soit la fonction :  $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  on a  $3x^2 \leq f(x)$

En déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution :** et et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exercice20 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :

$x - 2 \leq f(x) \leq x$  et puisque :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

**Exercice21 :** Soit  $f(x) = \frac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

