

01.

1. Déterminer la valeur de vérité et la négation de chaque proposition suivante .

- a. $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$
- b. $x \in \mathbb{R} ; (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$.
- c. $(7 < 5 \text{ et } 2+1=3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$
- d. $(7 < 5 \Rightarrow 2+1=0) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$
- e. $\exists n \in \mathbb{Z} , n^2 \leq n . \forall x \in \mathbb{R} , x^2 < x .$
- f. $\forall x \in \mathbb{R} , \exists y \in \mathbb{R} , x-y+3=0 . \exists y \in \mathbb{R} , \forall x \in \mathbb{R} , x-y+3=0 .$
- g. $\forall x \in \mathbb{R} ; \sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 .$

02.

Ecrire les expressions suivantes on utilise les quantificateurs qui correspond .

- a. Le carré d'un nombre réel est positif .
- b. Il n'existe pas un nombre rationnel est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$.
- c. Pour tout nombre entier naturel n, il existe au moins un entier naturel k tel que $k \leq n$.

03.

Déterminer la valeur de vérité qui suit

- a. $x \in \mathbb{R} ; (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$.
- b. $(7 < 5 \text{ et } 2+1=3) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$.
- c. $(7 < 5 \Rightarrow 2+1=0) \text{ ou } (-3 \in \mathbb{N})$.
- d. $\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \leq x \Rightarrow |x| = x$.

04.

1. On utilise le raisonnement par contre exemple , montrer que la relation suivante est fausse :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \exists y \in \mathbb{R} : xy = 2 .$$

2. On utilise le raisonnement par contre posé , montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} , \forall y \in \mathbb{R} : (x \neq 1 \wedge y \neq 1) \Rightarrow xy + 1 \neq x + y .$$

3. On utilise le raisonnement par contre posé , tel que a et b de $\mathbb{R}$ avec $b \neq 2a$ montrer que :

$$b \neq \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7} .$$

4. Sachant que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ montrer par raisonnement par l'absurde que : $\forall r \in \mathbb{Q} , r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5. On utilise le raisonnement par l'absurde

- a. montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : a+b=0 \Rightarrow (a=0 \wedge b=0)$.
- b. on déduit que : les solutions de l'équation suivante : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.

6. On utilise le raisonnement par disjonctions des cas , montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

7. On utilise le raisonnement par des équivalences successives montrer que $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \text{ et } q) \Rightarrow r)$

8. Soient x et y de $\mathbb{R}^+$, montrer que : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$.

05.

Soient p et q deux propositions , montrer par deux méthodes différentes que chaque proposition est une loi logique :

a. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

b. $p \Rightarrow (\bar{p} \Rightarrow q)$.

c. $(\exists p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ est elle proposition ?.

06.

On considère l'implication suivante $P(a,b) : a + b + ab + 1 = 0 \Rightarrow (a = -1 \text{ ou } b = -1)$.

1. Déterminer l'implication contre posée de $P(a,b)$.

2. Déterminer la négation de $P(a,b)$.

3. Montrer que $P(a,b)$ est une implication vraie.

07.

On considère l'implication suivante P :

" $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \left(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \right) \Rightarrow (x=1 \text{ et } y=2)$ " .

1. Ecrire P sans utiliser le connecteur logique $\Rightarrow$ et sans utiliser l'expression : « si ...alors ... » .

2. Déterminer la négation de P .

3. Déterminer l'implication contre posée de P .

4. Déterminer la valeur de vérité de P .

08.

On utilise le raisonnement par , montrer que :

a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, le nombre $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5 .

b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le nombre $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5 .

c. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 3 divise le nombre $4n^3 - n$.

d. Pour tout n de $\mathbb{N}$, 8 divise le nombre $1 + 5^{n+1} + 2 \times 3^n$.

e. Pour tout n de $\mathbb{N}$, 9 divise le nombre $4^n + 6n - 1$.

f. Pour tout n de $\mathbb{N}$, 17 divise le nombre $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

g. $\forall n \in \mathbb{N} : 1+3+5+7+\dots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{i=n} (2i+1) = (n+1)^2$

h. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \sum_{i=1}^{i=n} i(i+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

i. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

j. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$

k. $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{k=n} k(n+k) = \frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$